Suite de Fibonacci

1 Historique

Dans un ouvrage intitulé « *Liber Abaci* » écrit en 1202, Fibonacci, dit aussi Léonard de Pise, pose le problème suivant :

« *Combien de descendants un couple de lapins aura t-il en une année, la nature des lapins étant telle qu'une paire de lapins donne naissance à une autre paire de lapins chaque mois, et ce dès l'âge de deux mois ?* »

En utilisant les hypothèses émises, schématiser cette situation à l'aide d'un arbre, et donner le nombre de couples de lapins de 0 à 6 mois.

2 Suite de Fibonacci (1175-1240)

On appelle suite de Fibonacci, la suite (u_n) récurrente à deux termes définie par :

- Les deux premier termes : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$
- la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

Déterminer les premier termes : u_2, u_3, u_4, u_5, u_6.
Vérifier que cette suite correspond bien au problème posé et, à l'aide d'un algorithme, donner la réponse au problème posé.

3 Suites auxiliaires

On pose la suites (a_n) définie par : $a_n = \alpha\, u_{n+1} + u_n$
Montrer que la suite (a_n) est géométrique si et seulement si α est solution de l'équation :

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

Montrer que cette équation possède deux solutions :

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

On pose alors les suite (v_n) et (w_n) définies par :

$$v_n = \alpha_1\, u_{n+1} + u_n \quad \text{et} \quad w_n = \alpha_2\, u_{n+1} + u_n$$

Déterminer les termes v_n et w_n en fonction de n.

4 Conclusion

Montrer que : $u_{n+1} = \dfrac{v_n - w_n}{\sqrt{5}}$. En déduire la formule de Binet :

$$\boxed{u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]}$$

Vérifier à l'aide de votre calculatrice la véracité de cette formule en calculant les 6 premiers termes.