

Compléments sur la valeur absolue

1 Équations du type $|u(x)| = |v(x)|$

Égalité : $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$

Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} : $|2x - 1| = |5 - x|$

$$2x - 1 = 5 - x \text{ ou } 2x - 1 = -5 + x \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = -4$$

Graphiquement : Il faut tracer les fonctions $f(x) = |2x - 1|$ et $g(x) = |5 - x|$

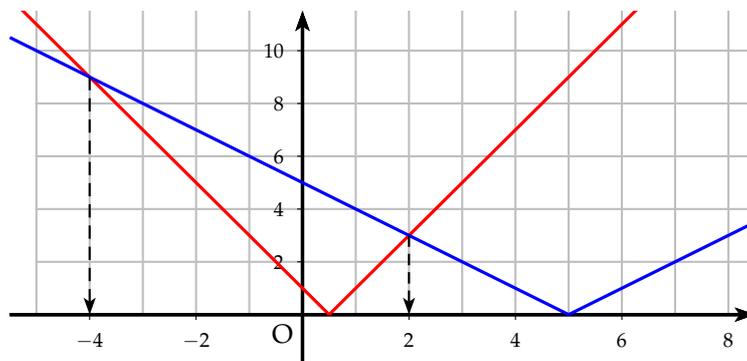
Il faut alors trouver les différentes formes des fonctions f et g . On détermine les valeurs frontières c'est à dire les valeurs de x qui annulent les fonctions f et g .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x - 1$		0	
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	0	$2x - 1$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$5 - x$		0	
$ 5 - x $	$5 - x$	0	$5 + x$

On obtient alors les représentations suivantes avec les solutions (abscisses des points d'intersection)



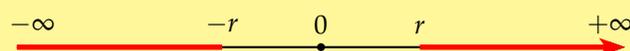
2 Inéquation du type $|u(x)| < r$ et $|u(x)| > r$

Soit $r > 0$

• **Infériorité :** $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$



• **Supériorité :** $\forall x \in \mathbb{R}, |x| > r \Leftrightarrow x < -r \text{ ou } x > r$



Exemple : Résoudre dans \mathbb{R} , les inéquations :

$$1) |5x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < 5x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < 5x < 5 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < 1$$

$$S = \left] -\frac{1}{5}, 1 \right[$$

$$2) |3 - 2x| \geq 5 \Leftrightarrow 3 - 2x \leq -5 \text{ ou } 3 - 2x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ ou } x \leq -1$$

$$S =]-\infty; -1] \cup [4; +\infty[$$

3 Autre type d'équation et d'inéquation

1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $|-3x + 4| + |-5 + x| = 10$ (E_1)

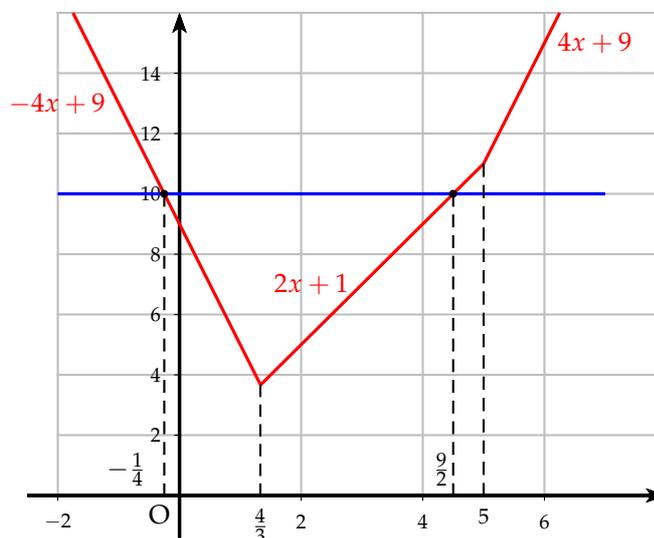
- On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$$-3x + 4 = 0 \text{ et } -5 + x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \text{ et } x = 5$$

- On remplit un tableau de forme : $S = \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{9}{2} \right\}$

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	5	$+\infty$
$ -3x + 4 $	$-3x + 4$ $+$	0	$3x - 4$ $-$	$3x - 4$ $-$
$ -5 + x $	$5 - x$ $-$	$\frac{11}{3}$	$5 - x$ $+$	$-5 + x$ $+$
(E_1)	$-4x + 9 = 10$ $x = -\frac{1}{4}$ possible	$2x + 1 = 10$ $x = \frac{9}{2}$ possible	$4x - 9 = 10$ $x = \frac{19}{4}$ impossible	

- Résolution graphique :



2) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation suivante : $|2x - 1| \leq |x + 2|$ (E_2)

- Comme les deux quantités sont positives, on peut élever au carré :

$$(2x - 1)^2 \leq (x + 2)^2 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 - (x + 2)^2 \leq 0 \stackrel{\text{factorisation}}{\Leftrightarrow} (x - 3)(3x + 1) \leq 0$$

On prend à l'intérieur des racines : $S = \left[-\frac{1}{3}; 3\right]$

- Résolution graphique :

