Généralités sur les fonctions

Table des matières

1 Fonction numérique

1.1 Définition

Définition 1 : Une fonction numérique f d'une variable réelle x est une relation qui à un nombre réel x associe un unique nombre réel y noté $f(x)$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{R} \text{ ou } D_f &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

⚠ Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un nombre réel.

Remarque :

- On dit que $y = f(x)$ est **l'image** de x par f et
- x est **un antécédent** (non unique) de $y = f(x)$ par f

Exemples : :

- $f(x) = 3x - 7$ $\quad f$ est une fonction affine
- $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ $\quad f$ est une fonction du second degré
- $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-3}$ $\quad f$ est une fonction homographique

1.2 Ensemble de définition

Définition 2 : L'ensemble définition d'une fonction f est l'ensemble des valeurs de la variable x pour lesquelles la fonction est définie

Exemples :

- La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4-x}$ est telle que $D_f =]-\infty\,;\,4]$
  (on doit avoir $4 - x \geqslant 0$)
- La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{3}{x^2 - 5x - 6}$ est telle que $D_g = \mathbb{R} - \{-1\,;\,6\}$
  (on doit avoir $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, $x = -1$ racine évidente)

1.3 Comparaison de fonctions

Définition 3 : On dit que deux fonctions f et g sont égales si et seulement si :

- Elles ont même ensemble de définition : $D_f = D_g$
- Pour tout $x \in D_f$, $f(x) = g(x)$

Exemple : Les fonction f et g suivantes sont-elles égales ?

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f, on doit avoir : $\dfrac{x-1}{x+3} \geqslant 0$, soit $D_f =]-\infty\,;-3[\, \cup\, [1\,;+\infty[$

Pour g, on doit avoir : $x-1 \geqslant 0$ et $x+3 > 0$, soit $D_g = [1\,;+\infty[$

On a donc : $D_f \neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales.

Remarque : Cependant sur $[1\,;+\infty[$, on a $f(x) = g(x)$

Définition 4 : Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

On dit que, sur I :

- f est inférieure à g , noté $f < g$ si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant g(x)$.
- f est positive, noté $f > 0$ si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant 0$.
- f admet un maximum en x_M si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant f(x_M)$.
- f admet un minimum en x_m, si, et seulement si : $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant f(x_m)$.
- f admet un extremum ssi, f admet un minimum ou un maximum.

Remarque : Deux fonctions ne sont pas toujours comparables (contrairement aux nombres réels). On dit que la relation d'ordre n'est pas totale. Par exemple :

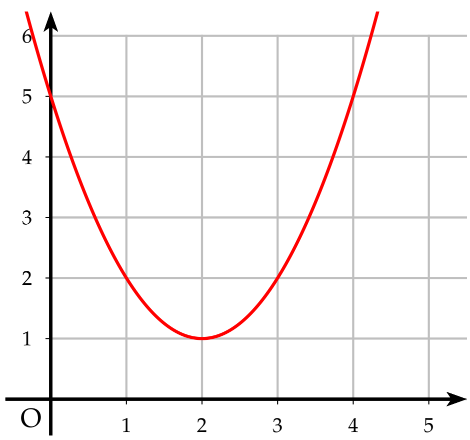
Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.

- Si $0 < x < 1$, $\quad x > x^2$, soit $\quad f > g \quad (0{,}5 > 0{,}5^2)$
- Si $x > 1$, $\quad x < x^2$, soit $\quad f < g \quad (2 < 2^2)$

Exemple : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 + 1$

On a le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$



La fonction f est donc positive $f \geqslant 1$ et admet en 2 un minimum de 1 sur $\mathbb{R}$.

2 Variation d'une fonction

Définition 5 : Soit I un intervalle (ouvert ou fermé, borné ou non). $a, b \in \mathrm{I}$

Soit f une fonction définie sur I. On dit que :

- f est **croissante** sur I si, et seulement si : $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)$
- f est **décroissante** sur I si, et seulement si : $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b)$
- f est **monotone** sur I si, et seulement si f est croissante ou décroissante sur I.

Remarque : Une fonction croissante conserve la relation d'ordre et une fonction décroissante inverse la relation d'ordre.

Pour montrer la monotonie d'une fonction sur I, on prendra deux réels $a, b \in \mathrm{I}$ tel que $a > b$ et l'on étudiera le signe de $f(a) - f(b)$. Si le signe est positif la fonction est croissante, si le signe est négatif la fonction est décroissante.

Exemple : La fonction affine f définie par : $f(x) = 2x + 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car son coefficient directeur est positif.

La fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;\,0[$.

3 Résolution graphique

Soit la fonction f définie sur $[-1,8\,;\,2,9]$ par : $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 15$.

À l'aide d'une représentation graphique, résoudre les questions suivantes.

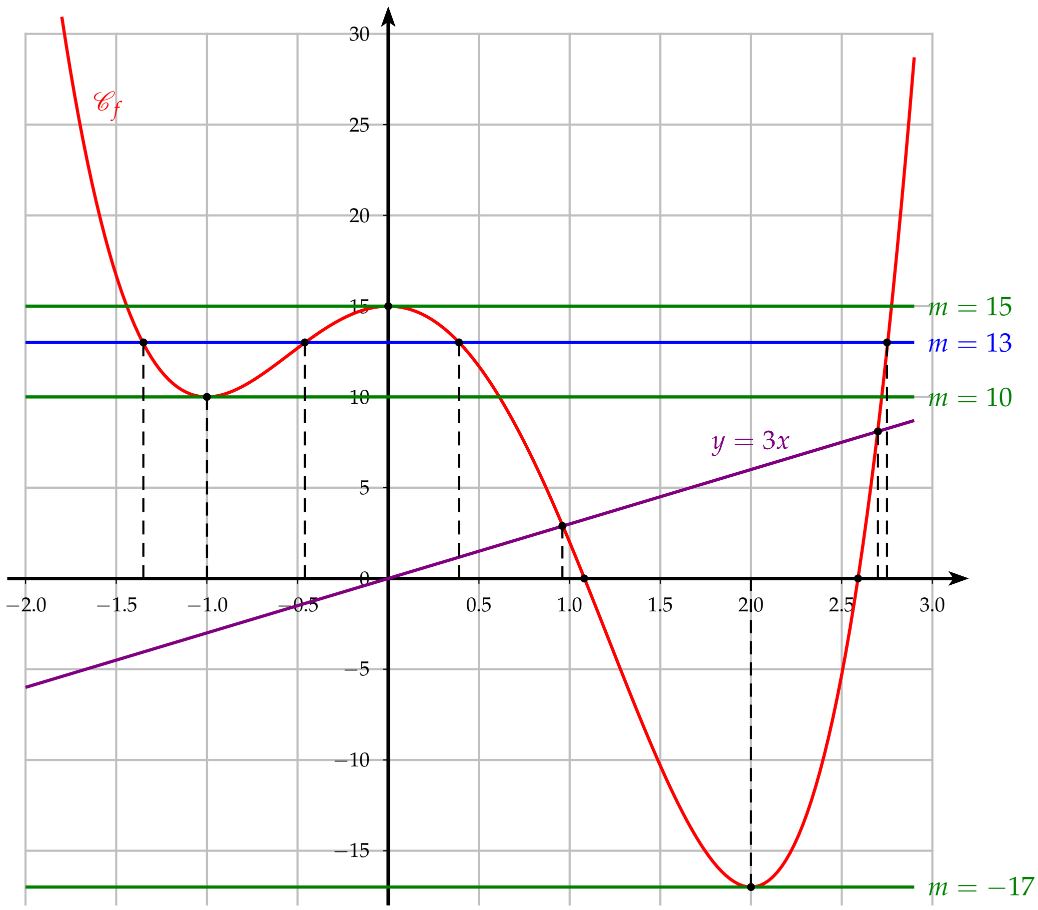
Toutes les valeurs seront données à la précision du dixième

1) Déterminer le tableau de variation de la fonction f
2) Résoudre les équations suivantes :
   a) $f(x) = 0$ b) $f(x) = 13$
3) D'une façon générale donner le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$ où m est un réel quelconque.
4) Résoudre les inéquations suivantes :
   a) $f(x) \leqslant 0$ b) $f(x) > 13$
5) Résoudre l'équation $f(x) = 3x$

On programme cette fonction sur la calculatrice :

Fenêtre $X \in [-2\,;\,3],\ X_{\text{grad}} = 0.1$ et $Y \in [-20\,;\,30],\ Y_{\text{grad}} = 5.$

On trouve alors la représentation suivante :



1) On obtient le tableau de variation suivant :

x	-1.8		-1		0		2		2.9
$f(x)$	31	↘	10	↗	15	↘	-17	↗	29

2) a) $f(x) = 0$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
Calculatrice : aller dans "*calcul*" sélectionner "*zero*". On obtient :

$$x_1 \approx 1,1 \quad \text{et} \quad x_2 \approx 2,6$$

b) $f(x) = 13$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite $y = 13$.
Calculatrice : entrer la fonction $Y = 13$ puis aller dans "*calcul*" sélectionner "*intersect*". On obtient :

$$x_1 \approx -1,3, \quad x_2 \approx -0,4, \quad x_3 \approx 0,4 \quad \text{et} \quad x_4 \approx 2,75$$

3) $f(x) = m$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite $y = m$. On obtient donc suivant les valeurs de m :

- Si $m < -17$: l'équation n'a pas de solution
- Si $m = -17$: l'équation admet une solution (positive)

- Si $-17 < m < 10$: l'équation admet deux solutions (2 positives)
- Si $m = 10$: l'équation admet 3 solutions (1 négative et 2 positives)
- Si $10 < m < 15$: l'équation admet 4 solutions (2 négatives et 2 positives)
- Si $m = 15$: l'équation admet 3 solutions (1 négative, 1 nulle et 1 positive)
- Si $m > 15$: l'équation admet 2 solutions (1 négative et 1 positive)

4) a) $f(x) \leqslant 0$: on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont sur ou en dessous de la droite des abscisses, on a donc : $S = [1,1\,;\,2,6]$

b) $f(x) > 13$: on cherche les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui sont au dessus de la droite d'équation $y = 13$, on a donc :
$$S = [-1,8\,;-1,3[\,\cup\,]-0,4\,;\,0,4[\,\cup\,]2,75\,;\,2,9]$$

5) $f(x) = 3x$: on cherche les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 3x$.
On trace la droite $y = 3x$ puis on lit les solutions : $x_1 \approx 0,9$ et $x_2 \approx 2,7$

4 Fonctions de référence

4.1 Fonction affine

Propriété 1 : Une fonction affine f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax + b$.

Le signe du coefficient directeur a donne les variations de la fonction :

si $a > 0$, f est croissante et si $a < 0$, f est décroissante

La représentation d'une fonction affine est une **droite** qui passe par le point $(0\,;\,b)$

4.2 Fonction carrée

Propriété 2 : La fonction carrée f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

La fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur R_+.

La représentation de la fonction carrée est une **parabole** d'axe (Oy) de sommet O.

4.3 Fonction inverse

Propriété 3 : La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;+\infty[$

La représentation de la fonction inverse est une **hyperbole** équilatère dont le point de symétrie est l'origine et les **asymptotes** les axes de coordonnées.

⚠ C'est une faute de dire que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$ car la monotonie s'étudie sur un intervalle.

4.4 La fonction racine carrée

4.4.1 Étude de la fonction racine carrée

Propriété 4 : La fonction racine carrée f est définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$.

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

La représentation de la fonction racine carrée est la **demi-parabole** d'ordonnées positives d'axe (Ox).

Démonstration : Montrons que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $a, b \geqslant 0$ tel que $a > b$. Déterminons le signe de $f(a) - f(b)$.

$$f(a) - f(b) = \sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

- Par définition de la racine carrée, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0$
- De plus comme $a > b$, on a : $a - b > 0$. On a donc $f(a) - f(b) > 0$

La fonction racine carrée est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a alors le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

La représentation de la fonction racine carrée est une demi-parabole d'ordonnées positives d'axe Ox. Elle admet une tangente verticale en 0.

On peut remplir le tableau de valeur suivant :

x	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$\sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3

4.4.2 Comparaison des fonctions carrée, identité et racine carrée

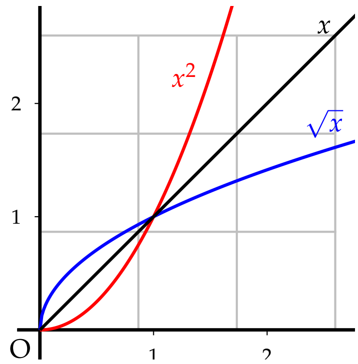
Théorème 1 : Pour tout réel x positif ou nul, on a les relations suivante :

$$\text{si } x \in [0\,;\,1], \quad x^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{x} \quad \text{et si } x \in [1\,;+\infty[, \quad \sqrt{x} \leqslant x \leqslant x^2$$

Remarque : On observe que le rapport de ces fonctions s'inverse autour de 1 comme le montrent les représentations suivantes :

On a tracé les fonctions carrée, identité et racine carrée.
On constate que :

- si $x < 1$ la fonction carrée est **en dessous** de la fonction identité qui est **en dessous** de la fonction racine.
- si $x > 1$ la fonction carrée est **au dessus** de la fonction identité qui est **au dessus** de la fonction racine.



Démonstration : Soit x un réel positif ou nul : $\quad (\forall x \geqslant 0,\ \sqrt{x^2} = |x| = x)$

- si $x \leqslant 1$, on multiplie par x chaque côté de l'inégalité donc $x^2 \leqslant x$
  Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle ne change pas les inégalités, donc $\sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{x} \Rightarrow x \leqslant \sqrt{x}$
- si $x \geqslant 1$, on multiplie par x chaque côté de l'inégalité donc $x^2 \geqslant x$
  Comme la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle ne change pas les inégalités, donc $\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x} \Rightarrow x \geqslant \sqrt{x}$

4.5 La fonction valeur absolue

4.5.1 Définition

La notion de valeur absolue est utilisée lorsque l'on s'intéresse à la valeur d'un nombre sans son signe. On ne considère par exemple dans -5 que le nombre 5.

Définition 6 : La valeur absolue d'un réel x, est le nombre noté $|x|$ tel que :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Exemple : $|-5| = 5 \quad$ et $\quad |21| = 21$

Remarque : La valeur absolue représente la distance entre deux nombres : dans la distance, seule la valeur positive est pris en compte.
La distance d entre 8 et 3 vaut $d = |8-3| = |3-8| = 5$

Algorithme : On peut proposer l'algorithme suivant en python pour calculer la valeur absolue d'un nombre réel.
On remarque qu'il n'est pas nécessaire de tester si x est positif, car dans ce cas la valeur absolue ne "*fait*" rien.

```python
def val_absolue(x):
    if x<0:
        x=-x
    return x
```

Propriété 5 : La fonction valeur absolue possède les propriétés suivantes :

- $|x-a|$ représente la distance de x au nombre a.
- On a l'égalité suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$
- Deux nombres opposés ont même valeur absolue : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| = |-x|$
  On dit que la fonction valeur absolue est **paire**
- Deux valeurs absolues sont égales ssi, les nombres sont égaux ou opposés :
  $$|x| = |y| \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x = -y$$
- L'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$
- On peut exprimer un intervalle à l'aide d'une valeur absolue, avec $r > 0$:
  $$|x-a| < r \quad \Leftrightarrow \quad x \in]a-r\,;\,a+r[$$
  r est alors le rayon de l'intervalle.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|2x-2| = |3-x|$

comme $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$, on a alors :

$$2x - 2 = 3 - x \quad \text{ou} \quad 2x - 2 = -3 + x \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{3} \text{ ou } x = -1$$

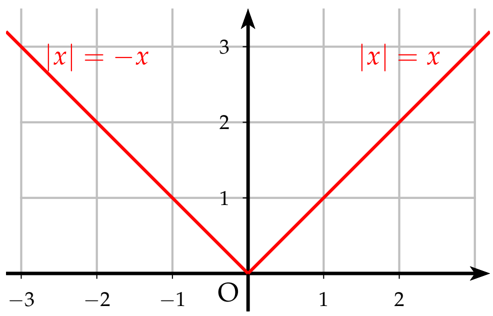
4.5.2 Variation

La fonction valeur absolue est une fonction affine définie par morceaux. Sa représentation est alors deux demi-droite.

- Si $x > 0$, $|x| = x$ la fonction est croissante
- Si $x < 0$, $|x| = -x$ la fonction est décroissante

On obtient alors le tableau de variation et la représentation suivante :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



La représentation de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

5 Parité d'une fonction

5.1 Fonction Paire

Définition 7 : On dit qu'un fonction f est paires si et seulement si l'on a :

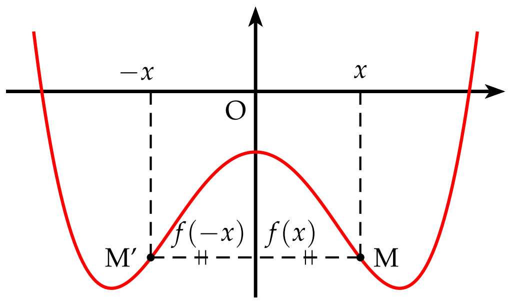
- Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x)$

La courbe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemples : Les fonctions suivantes sont paire sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 1, \quad f(x) = |x|, \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Remarque : Ces fonctions sont dites « paires » car les fonctions polynômes qui ne contiennent que des puissances paires sont paires.



5.2 Fonction impaire

Définition 8 : On dit qu'un fonction f est impaire si et seulement si l'on a :

- Son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à l'origine.
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = -f(x)$

La courbe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples :

Les fonctions suivantes sont impaire sur leur ensemble de définition :

$$f(x) = x^3, \quad f(x) = 4x^3 - 3x, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \tan x$$

Remarque : Ces fonctions sont dites « impaires » car les fonctions polynômes qui ne contiennent que des puissances impaires sont impaires.