La fonction exponentielle

Opération sur la fonction exponentielle

EXERCICE 1

Simplifier les écritures suivantes :

1) $(e^x)^3 e^{-2x}$ 2) $\dfrac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$ 3) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x}$ 4) $e^{-x}e^2$

5) $\dfrac{e^{3x}}{(e^{-x})^2 \times e^x}$ 6) $\dfrac{e^x e^y}{e^{x-y}}$ 7) $\dfrac{(e^{-3x})^2 e^{5x}}{e^{-x}}$

EXERCICE 2

Fonctions hyperboliques

On définit les fonction ch et sh, respectivement sinus et cosinus hyperbolique, sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) a) Démontrer que $[\text{ch}(x)]^2 - [\text{sh}(x)]^2 = 1$.
   b) À quelle formule trigonométrique cette relation fait-elle écho ?
2) Démontrer que $\text{ch}(2x) = 2\,[\text{ch}(x)]^2 - 1$ et que $\text{sh}(2x) = 2\text{ch}(x) \times \text{sh}(x)$.

Remarque : On retrouve également des relations similaire en trigonométrie.

Équations et inéquations

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $e^{3-x} = 1$ 2) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$ 3) $2e^{-x} = \dfrac{1}{e^x + 2}$ 4) $e^{x^3} = e^8$

5) $e^{x+1} = e^{\frac{1}{x}}$ 6) $e^{x^2} = (e^2)^3 e^{-x}$ 7) $e^{x^2} = e^{x-2}$ 8) $e^{2x} - e^{x-2} = 0$

9) $e^{2x} + 2e^x - 3 = 0$ on pourra poser $X = e^x$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $e^{x^2} \leqslant \dfrac{1}{e^2}$ 2) $(e^x)^3 \leqslant e^{x+6}$ 3) $e^x \leqslant \dfrac{1}{e^x}$

4) $(e^x - 1)e^x > e^x - 1$ 5) $e^{2x} < e^x$

6) Montrer que : $3e^{2x} + e^x - 4 = (e^x - 1)(3e^x + 4)$.
   En déduire le signe de $3e^{2x} + e^x - 4$ en fonction de x.

Dérivées et étude d'une fonction

Exercice 5

Déterminer les dérivées puis en déduire les variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ 2) $f(x) = \dfrac{1}{x}e^x$ 3) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2e^x + 1}$

4) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$ 5) $f(x) = x^2 - 2(x-1)e^x$

Exercice 6

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2e^x - 3}{e^x + 1}$

1) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -3 < f(x) < 2$.
3) Déterminer l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.
4) On admet que les droites d et d' d'équations respectives $y = -3$ et $y = 2$ sont asymptotes à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$.
   Tracer les asymptotes d et d', la tangente (T) puis $\mathscr{C}_f$.

Fonction e^u

Exercice 7

Déterminer les dérivées puis en déduire les variations des fonctions suivantes :

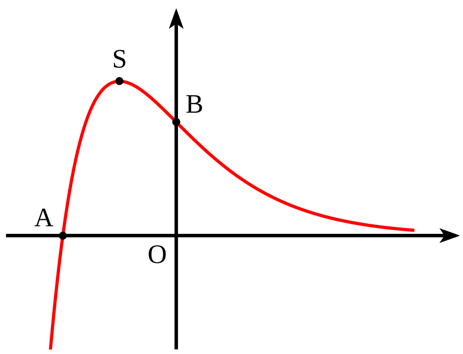
1) $f(x) = e^{-2x+1}$ 2) $f(x) = (2x-3)\,e^{\frac{1}{2}x+1}$

3) $f(x) = x\,e^{2x^2-3}$ 4) $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$

Exercice 8

La courbe $\mathscr{C}_f$ représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax+b)\,e^{-x}$.
où a et b sont deux réels.

1) $\mathscr{C}_f$ passe par les points $A(-2;0)$ et $B(0;2)$. Déterminer a et b.
2) En déduire les coordonnées du sommet S.



Exercice 9

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$.

1) Calculer $f(-x)$. Que peut-on conclure pour $\mathscr{C}_f$?
2) Calculer la dérivée de f puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $x \in [-2\ ;\ 2\ ]$ dans un repère orthonormal.
   Unité graphique : 2 cm sur les deux axes.

Exercice 10

Plant de maïs

Partie 1

On étudie l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par la fonction h du type : $h(t) = \dfrac{a}{1 + b\mathrm{e}^{-0{,}04t}}$.

où $h(t)$ désigne la hauteur du plant, en mètres, a et b des réel positifs et t le temps en jours.

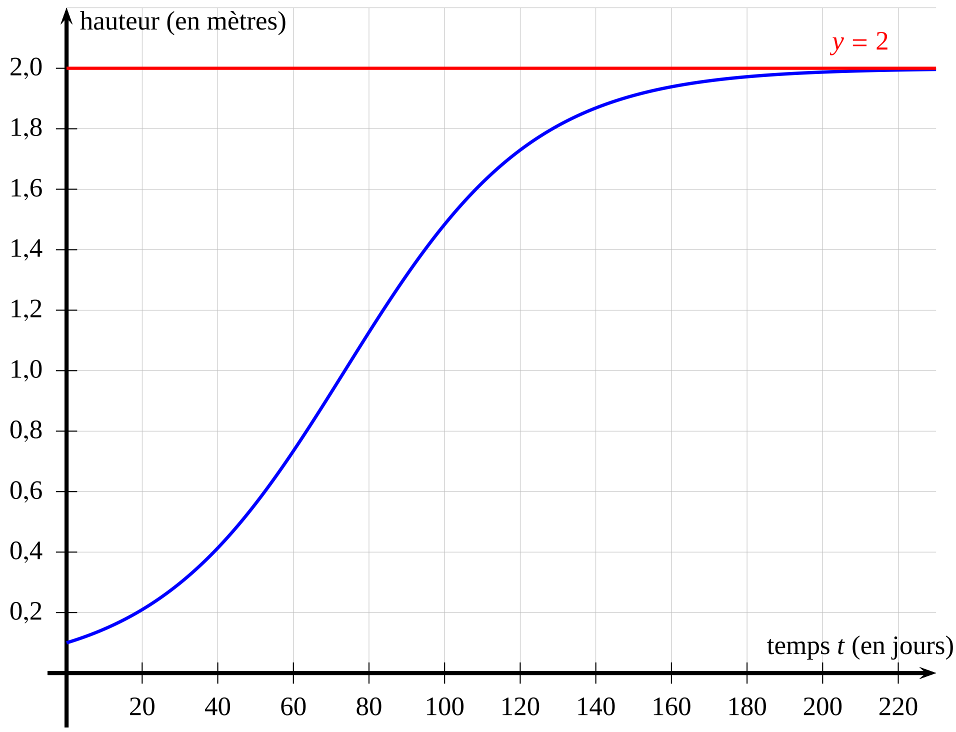
Initialement, le plant mesure $0,1$ m et sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

Déterminer a et b pour que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;250]$ par : $f(t) = \dfrac{2}{1 + 19\mathrm{e}^{-0{,}04t}}$

1) Déterminer $f'(t)$ en fonction de t.
   En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;250]$.
2) A l'aide d'un algorithme, donner, au jour près, le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à $1,5$ m.
3) On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs ; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.
   La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t_0.
   En utilisant le graphique donné ci-dessous, déterminer une valeur approchée de t_0. Estimer alors la hauteur du plant.



Exercice 11

Chaînette

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation d'une fonction g définie sur $[-1\ ;\ 1]$ par :

$$g(x) = \frac{1}{2a}\left(e^{ax} + e^{-ax}\right) \quad \text{avec} \ \ a > 0$$

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad (x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$$

Dans la suite, on définit sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction f par : $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$

1) Déterminer la fonction dérivée de la fonction f. Préciser $f'(0)$ et $f'(1)$.
2) On note f'' la fonction dérivée de f'.
   a) Vérifier que, pour tout réel $x \geqslant 0$, $f''(x) = 4xe^{2x}$.
   b) Que peut-on dire sur la monotonie de la fonction f' sur $[0\ ;+\infty[$?
   En déduire que l'équation $f'(x) = 0$ admet un unique solution α sur $[0\ ;\ 1]$.
   c) Écrire un algorithme permettant un encadrement de α à 10^{-2}.
3) a) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b) En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ 2]$, la fonction f s'annule pour une unique valeur. Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.
   c) Tracer la fonction g sur $[-1\ ;\ 1]$ avec cette valeur approchée de a sur la calculatrice.

Atténuation

Exercice 12

Dans une usine, un four cuit des céramiques à la température de 1 000 °C.
À la fin de la cuisson, il est éteint et il refroidit.
On s'intéresse à la phase de refroidissement du four, qui débute dès l'instant où il est éteint. La température du four est exprimée en degré Celsius (° C).

La porte du four peut être ouverte sans risque pour les céramiques dès que sa température est inférieure à 70° C. Sinon les céramiques peuvent se fissurer, voire se casser.

On note t le temps, en heure, écoulé depuis l'instant où le four a été éteint.

La température du four (en degré Celsius) à l'instant t est donnée par la fonction f définie, pour tout nombre réel t positif, par :

$$f(t) = a\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{5}} + b, \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

On admet que f vérifie la relation suivante : $f'(t) + \dfrac{1}{5}f(t) = 4$.

1) Déterminer a et b sachant qu'initialement, la température du four est de 1 000 °C.
2) Étudier les variations de f sur $[0\ ;+\infty[$.
   Vers quelle valeur tend la fonction f pour un temps t très long ?
3) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien d'heures le four peut-il être ouvert sans risque pour les céramiques ? On se justifiera.

Exercice 13

Le modèle de Malthus

Il existe de nombreux modèles mathématiques permettant d'étudier la croissance d'une population. Le terme population est utilisé ici au sens le plus large : il peut s'agir d'une population d'humains, d'animaux, de plantes, de personnes infectées par un virus, etc. Dans cet exercice on traitera du modèle le plus simple : le modèle de Malthus.
On considère que les ressources de la population étudiée sont illimitées. On fait alors l'hypothèse que l'accroissement de la population d'une année à l'autre est proportionnel à l'effectif de cette population.

Partie A : Le modèle discret

Pour tout entier naturel n, on appelle P_n l'effectif de la population à l'année n.
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe un réel $k > -1$, dépendant des taux de mortalité et de natalité telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P_{n+1} - P_n = k\,P_n$.

1) a) Justifier que la suite (P_n) ainsi définie est géométrique.
   b) En déduire l'expression de P_n en fonction de n, de k et de la population initiale P_0.
2) Indiquer le sens de variation de la suite (P_n) en fonction de la valeur de k.
3) On suppose que la population initiale est de 1 000 individus et que $k = 0,1$.
   a) Déterminer la population au bout de 10 ans.
   b) Déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la population double.

Partie B : Le modèle continu

On appelle désormais $P(t)$ l'effectif de la population à l'instant $t \in [0\,;+\infty[$.
On suppose que la fonction P est dérivable et positive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
D'après l'hypothèse sur l'accroissement de la population, il existe un réel $k > 0$ telle que :

$$\forall t \in [0\,;+\infty[,\quad P'(t) = k\,P(t).$$

1) Montrer que la fonction $t \mapsto P_0\,e^{kt}$ répond au problème.
2) Quel est le sens de variation de P suivant les valeurs de k.
3) On se place dans le cas où $k = 0,1$ et d'une population initiale de 1 000 individus.
   a) Calculer la population au bout de 10 ans et comparer cette valeur au modèle discret.
   b) On appelle temps de doublement le temps λ au bout duquel la population a doublé par rapport à la population initiale. À l'aide d'un programme sur votre calculatrice déterminer une valeur approchée à 10^{-2} de λ.

Pour aller plus loin

Exercice 14

Datation au carbone 14

Désintégration atomique : Si $N(t)$ est le nombre de noyaux d'un corps radioactif présent à l'instant t (t en années), la variation $\mathrm{d}N(t)$ de ce nombre pendant la durée $\mathrm{d}t$ (par désintégration) est proportionnelle à $N(t)$. On a alors :

$$N'(t) = -\lambda N(t) \qquad \text{avec} \quad \lambda > 0$$

1) En vous inspirant de l'exercice précédant, proposer une expression de $N(t)$ répondant au problème. On appellera N_0 le nombre de noyaux initial.

2) Pour résoudre l'équation $e^b = a$ avec $a > 0$, on utilise la fonction réciproque de la fonction exponentielle appelée logarithme népérien et notée ln. Ainsi :

$$e^b = a \quad \Leftrightarrow \quad a = \ln b$$

La demi-vie ou période de désintégration est le temps noté $t_{0,5}$ au bout duquel $N(t)$ a diminué de moitié. Déterminer $t_{0,5}$ en fonction de λ.

3) Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, celui-ci se désintègre avec une demi-vie de 5 730 ans.
Si un fragment d'os contient 71 % de sa quantité initiale de carbone 14, quel âge a-t-il ?

Exercice 15

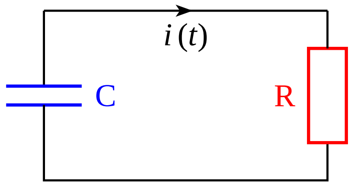
Décharge d'un condensateur

Un condensateur est un réservoir de charges électriques. Une fois chargé, il conserve sa charge électrique. Si on le relie à une résistance, il se décharge.
La tension électrique au borne d'un condensateur u_C est proportionnelle à sa charge q.
On a alors : $u_C(t) = \dfrac{q}{C}$ où C est la capacité du condensateur.
L'intensité électrique $i(t)$ en fonction du temps est définie par : $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$.

$u_C(t) + u_R(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_R(t) = -u_C(t)$

De la loi d'Ohm : $u_R(t) = Ri(t) = R\dfrac{dq}{dt}$ on a :

$u'_C(t) = \dfrac{1}{C}\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{1}{RC}u_R(t) = -\dfrac{1}{RC}u_C(t)$



1) En vous inspirant de l'exercice précédant, proposer une expression de $u_C(t)$ répondant au problème. On appellera E la tension aux bornes du condensateur à l'instant initial.
2) À l'instant initial, la tension aux bornes du condensateur de 0,2 F est de 3 V.
Au bout d'une seconde la tension aux bornes du condensateur n'est plus que de 1,1 V.
Calculer la valeur de la résistance R. On donnera une valeur approchée à 10^{-2}.
3) On admet que le condensateur est déchargé lorsque la tension à ses bornes est inférieur à 0,01 V. Déterminer le temps nécessaire pour que le condensateur soit déchargé.

Remarque : On admettra que la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.