La fonction exponentielle : problèmes

EXERCICE 1

Entreprise pharmaceutique

Une entreprise pharmaceutique fabrique un soin antipelliculaire. Elle peut produire entre 200 et 2 000 litres de produit par semaine. Le résultat, en dizaines de milliers d'euros, réalisé pour la production et la vente de x centaines de litres est donné par la fonction R définie par :

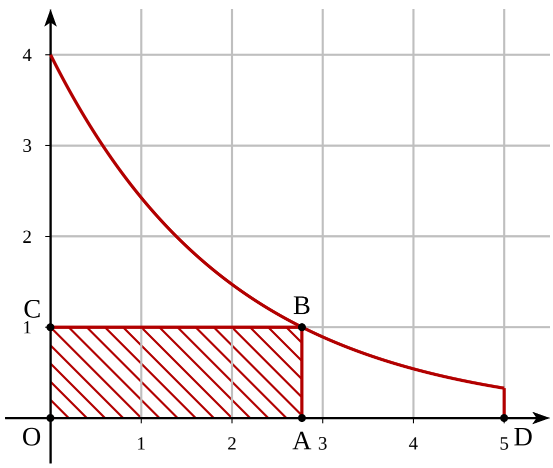
$$R(x) = (5x - 30)e^{-0,25x} \quad \text{avec} \quad x \in [2\,;\,20]$$

1) Calculer le résultat réalisé par la fabrication et la vente de 7 centaines de litres de produit. On l'arrondira à l'euro près.
2) Vérifier que pour la fabrication et la vente de 400 litres de produit, l'entreprise réalise un résultat négatif (appelé déficit).
3) Résoudre l'inéquation $R(x) \geqslant 0$. Interpréter dans le contexte de l'exercice.
4) On note R' la dérivée de la fonction R. Déterminer $R'(x)$.
   En déduire la quantité de produit que l'entreprise doit produire et vendre pour réaliser le résultat maximal.

EXERCICE 2

Enclos sur un terrain

Un propriétaire souhaite construire un enclos rectangulaire sur son terrain.
Celui-ci est représenté ci-dessous dans un repère orthonormé, d'unité le mètre. Il est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 5$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[0\,;\,5]$ par $f(x) = 4e^{-0,5x}$.



L'enclos est représenté par le rectangle OABC où O est l'origine du repère et B un point de $\mathscr{C}_f$, A et C étant respectivement sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. On note x l'abscisse du point A et D le point de coordonnées $(5\,;\,0)$. Le but de l'exercice est de déterminer la position du point A sur le segment [OD] permettant d'obtenir un enclos de superficie maximale.

1) Justifier que la superficie de l'enclos, en m^2, est donnée en fonction de x par $g(x) = 4xe^{-0,5x}$ pour x dans l'intervalle $[0\,;\,5]$.
2) La fonction g est dérivable sur $[0\,;\,5]$. Déterminer $g'(x)$ que l'on factorisera.
3) En déduire le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,5]$.
4) Où doit-on placer le point A sur [OD] pour obtenir une superficie d'enclos maximale ? Donner la superficie maximale possible en arrondissant le résultat au dm^2.

Exercice 3

Pièces en acier

Une entreprise fabrique des pièces identiques en acier, pour l'industrie aéronautique.
Ces pièces sont coulées dans des moules à la sortie du four. Elles sont stockées dans un entrepôt dont la température ambiante est maintenue à 25 °C.
Ces pièces peuvent être modelées dès que leur température devient inférieure ou égale à 600 °C et on peut les travailler tant que leur température reste supérieure ou égale à 500 °C.
La température de ces pièces varie en fonction du temps.
On admet que la température en degré Celsius de ces pièces peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = 1\,375\,e^{-0,075\,t} + 25$ où t correspond au temps, exprimé en heures, mesuré après la sortie du four.

1) Calculer la température des pièces à la sortie du four.
2) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Ce résultat était-il prévisible dans le contexte de l'exercice ?
3) Les pièces peuvent-elles être modelées 10 heures après la sortie du four ? Après 14 heures ?
4) On souhaite déterminer le temps minimum d'attente en heures après la sortie du four avant de pouvoir modeler les pièces.
   a) Compléter l'algorithme ci-dessous, pour qu'il renvoie ce temps minimum d'attente en heure (arrondi par excès à 0,1 près).

```
from math import*
def f(t):
    return 1375*exp(-0.075*t)+25

def seuil():
    t =....
    temperature =....
    while temperature >......:
        t=t+0.1
        temperature =.....
    return t
```

   b) Déterminer ce temps minimum d'attente. On arrondira au dixième.