Fonctions trigonométriques

Table des matières

1 Angles orientés

1.1 Le radian

Définition 1 : Le radian est une unité de mesure d'un angle comme le degré.

Il est défini comme la longueur de l'arc entre 2 points du cercle unité.

Le demi cercle unité a un longueur de π et correspond à un angle de π radian.

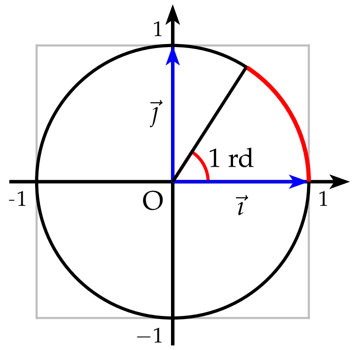
On a alors la conversion : $180° = \pi$ rd

La mesure en degré de 1 radian vaut :

$$1 \text{ rd} = \frac{180}{\pi} \approx 57°$$

Degré	30°	45°	60°	90°
Radian	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Remarque : Le radian est une grande unité qui n'est pas intuitive contrairement au degré.



Le cercle unité est aussi appelé cercle trigonométrique.

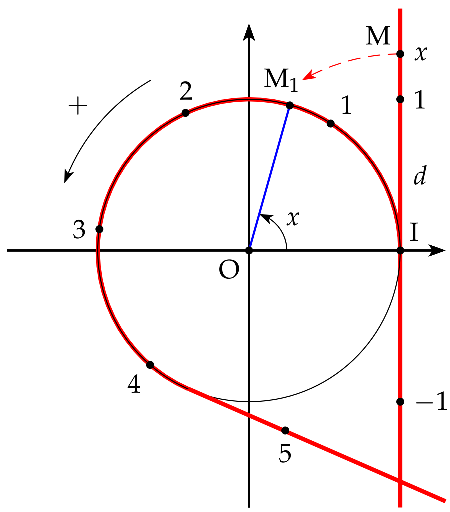
1.2 Angle défini sur l'ensemble des réels

Définition 2 : On appelle d la droite tangente au cercle unité en I.

À un point $M(1; x)$ de d, on associe un point M_1 par enroulement de d sur le cercle unité. Au réel x, on associe alors l'angle, en radian, formé par les points O, I et M_1 compté positivement ou négativement suivant le sens de la rotation.

Le sens positif ou trigonométrique est le sens inverse des aiguilles d'une montre.

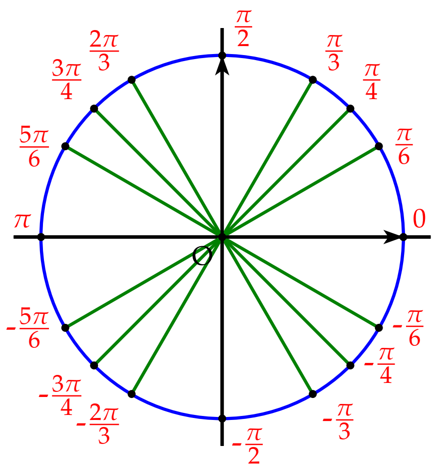
- Si M_1 est un point du cercle d'angle x, il est alors associé à tous $x' \in \mathbb{R}$ tels que : $x' = x + k \times 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.
- Réciproquement si $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x' = x + k \times 2\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ alors, x et x' sont associés au même point M_1 du cercle trigonométrique.
- On écrit alors : $x' = x \ [2\pi]$



Exemple : $-\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ en effet, $-\dfrac{5\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{-5\pi + 6\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

1.3 Angles remarquables sur le cercle

Angles remarquables sur le cercle trigonométrique dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$



2 Trigonométrie

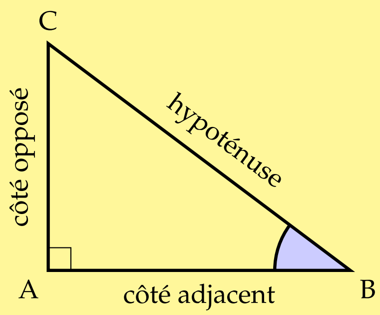
2.1 Dans le triangle rectangle

Définition 3 : Dans un triangle ABC rectangle en A, on définit les rapports suivants (qui ne dépendent que de la mesure des angles) :

$$\sin\widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos\widehat{B} = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{AB}{BC}$$

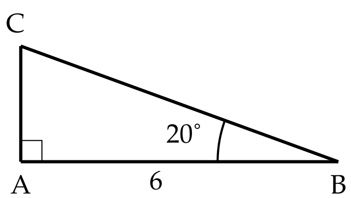
$$\tan\widehat{B} = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{AC}{AB}$$



Remarque : Lorsque l'on veut connaître l'angle d'un sinus, cosinus ou tangente donnés, on utilise les fonctions réciproques : arcsin, arccos ou arctan.

Exemple : Soit ABC rectangle en A tel que : $\widehat{ABC} = 20°$ et AB = 6

Calculer les longueurs BC et AC.

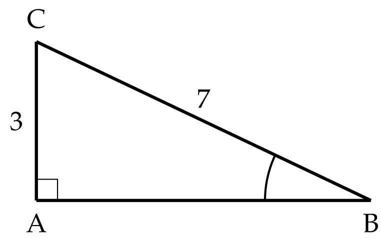


$$\cos 20° = \frac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC = \frac{AB}{\cos 20°} = \frac{6}{\cos 20°} \approx 6,39$$

$$\tan 20° = \frac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad AC = AB\tan 20° = 6\tan 20° \approx 2,18$$

Soit ABC rectangle en A tel que :
BC = 7 et AC = 3. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$.

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$
$$\widehat{ABC} = \arcsin \frac{3}{7} \approx 25,38^\circ$$



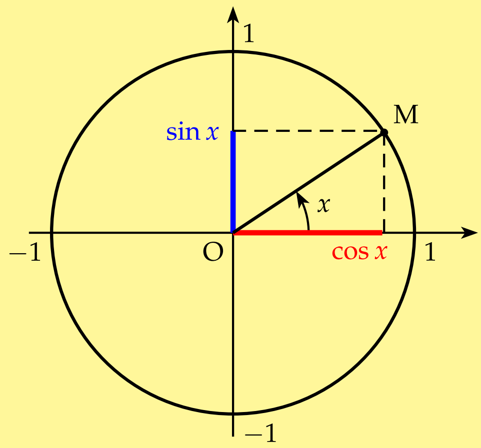
2.2 Définition

Définition 4 : M est le point du cercle trigonométrique associé au réel x

$$\cos x = \text{abscisse du point M}$$
$$\sin x = \text{ordonnée du point M}$$
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

On a alors :

- $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$



2.3 Tableau des angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

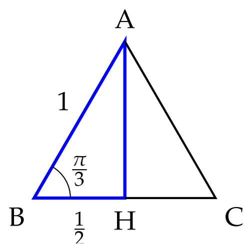
Démonstration : On calcule $\sin \frac{\pi}{3}$ et $\cos \frac{\pi}{3}$ à l'aide d'un triangle équilatéral.

Soient le triangle équilatéral ABC de côté 1 et H le pied de la hauteur issue de A.

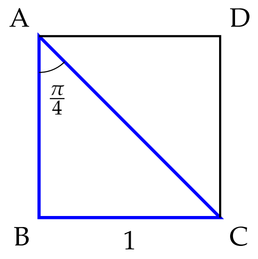
D'après les propriétés de triangle équilatéral $\text{H} = m[\text{BC}]$

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{AH}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{BH}{AB} = \frac{1}{2}$$



On calcule $\sin\dfrac{\pi}{4}$ à l'aide du carré ABCD de côté 1.



Dans le triangle isocèle rectangle ABC.

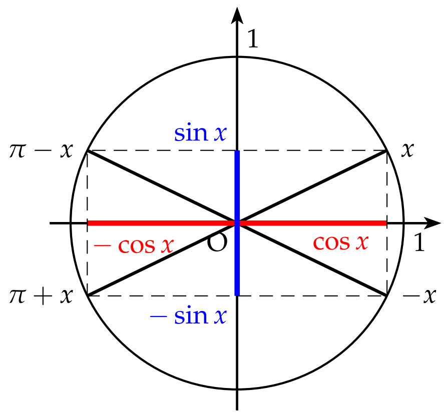
$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{BC} = \sqrt{2}$

$\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

À l'aide de l'angle complémentaire, on déduit les autres valeurs des lignes trigonométriques. Par exemple $\sin\dfrac{\pi}{6} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.

2.4 Relations trigonométriques

2.4.1 Relations de symétrie



Avec l'angle opposé :

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = +\cos x$$

Avec l'angle supplémentaire :

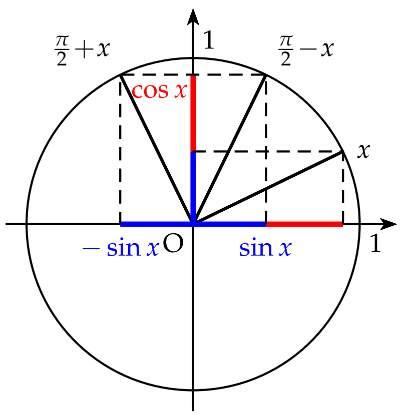
$$\sin(\pi - x) = +\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

Avec l'angle diamétralement opposé :

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

Remarque : La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

2.4.2 Relations de déphasage



Avec le complémentaire

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Avec un déphasage d'un quart de tour

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

Exemple : Simplifier : $A = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$

A l'aide des formules de symétrie et de déphasage, on a :

$$A = -\sin x - 3\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 4\sin x = -\sin x + 3\sin x - 4\sin x = -2\sin x$$

2.5 Équations trigonométriques

Résolution des équations dans $\mathbb{R}$: $\cos x = a$ et $\sin x = a$ avec $|a| \leqslant 1$

1) $\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos \alpha$ avec
   On détermine $\alpha \in [0;\pi]$ tel que $\alpha = \arccos a$ à l'aide du cercle unité.

   D'après les règles de symétrie : $x = \alpha$ ou $x = -\alpha$

   On trouve toutes les solutions réelles en ajoutant les multiples de 2π

   $$\cos x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

   Remarque : l'expression $x = \alpha + 2k\pi$ peut s'écrire $x = \alpha \ [2\pi]$

   Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\sqrt{2}\cos x - 1 = 0$

   $$\sqrt{2}\cos x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$$

   Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

2) $\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin \alpha$
   On détermine $\alpha \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\alpha = \arcsin a$ à l'aide du cercle unité.

   D'après les règles de symétrie : $x = \alpha$ ou $x = \pi - \alpha$

   On trouve toutes les solutions réelles en ajoutant les multiples de 2π

   $$\sin x = a \quad \Leftrightarrow \quad x = \alpha + 2k\pi \ \text{ ou } \ x = \pi - \alpha + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

   Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

   $$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \sin\frac{\pi}{3}$$

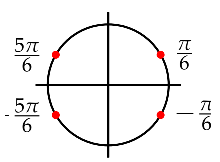
   Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$

Autre exemple

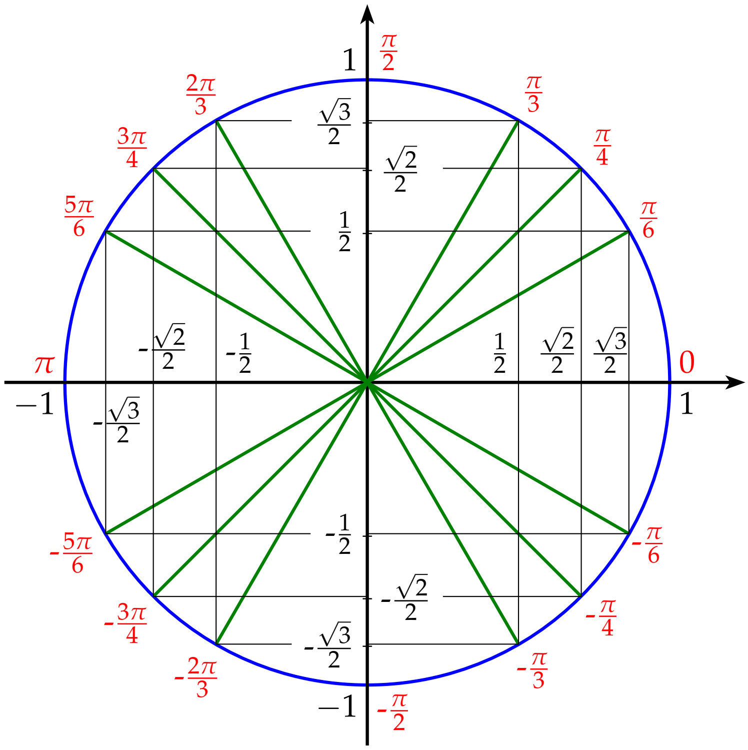
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



2.6 Lignes trigonométrie dans le cercle



3 Fonctions sinus et cosinus

3.1 Définition

Définition 5 : Les fonctions sinus et cosinus, notées sin et cos, sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} \sin\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1\ ;\ 1] \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \cos\ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow [-1\ ;\ 1] \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned}$$

Remarque : Comme à tout réel x on peut associer un angle, les fonctions sin et cos sont tout naturellement définies sur $\mathbb{R}$.

Notation : on devrait en toute rigueur écrire $\sin(x)$ et non $\sin x$ mais l'usage préfère la notation $\sin x$ sans parenthèse, plus simple.

3.2 Propriétés

Propriété 1 : Les fonctions sin et cos sont 2π-périodique :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{et} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

Les fonctions sin et cos sont respectivement impaire et paire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin x \quad \text{et} \quad \cos(-x) = \cos x$$

Leurs courbes représentatives sont donc symétriques respectivement par rapport à l'origine et à l'axe des ordonnées.

Remarque :

- Comme les fonctions sin et cos sont 2π-périodique :

  Les courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $\mathbb{R}$ se déduisent des courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$ par des translations de vecteurs $\vec{u} = (2k\pi)\,\vec{\imath},\ \ k \in \mathbb{Z}$.
- De la parité des fonctions sin et cos, on restreint leur étude à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

3.3 Variations

Théorème 1 : Les fonctions sin et cos sont dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin$$

D'après le cercle trigonométrique :

- $\forall x \in [0\,;\,\pi],\ \ \sin x \geqslant 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ -\sin x \leqslant 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ \cos' x \leqslant 0$

  La fonction cos est décroissante.
- $\begin{cases} \forall x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right], & \cos x \geqslant 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ \sin' x \geqslant 0 \\ \forall x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right], & \cos x \leqslant 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ \sin' x \leqslant 0 \end{cases}$

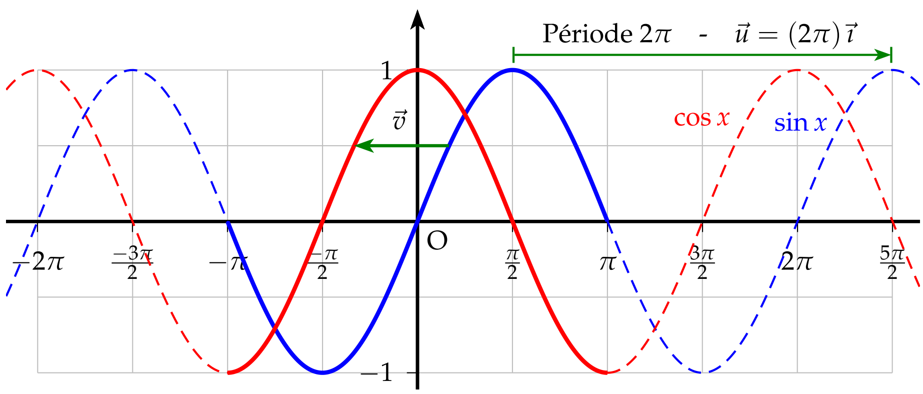
  La fonction sin est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin' x$		$+$	0	$-$	
$\sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos' x$	0		$-$		
$\cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

3.4 Courbes

- Pour tracer les courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $[-\pi\,;\,\pi]$, on utilise les propriétés de symétrie des fonctions sin et cos dues à leur parité.
- On déduit $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $\vec{u} = (2k\pi)\,\vec{\imath},\ \ k \in \mathbb{Z}$.
- Les courbes $\mathscr{C}_{\sin}$ et $\mathscr{C}_{\cos}$ sont des sinusoïdes.



Remarque : De $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on déduit la sinusoïde de cos par une translation de vecteur $\vec{v} = -\frac{\pi}{2}\,\vec{\imath}$ de la sinusoïde de sin.