Fonctions trigonométriques

Le radian et le cercle trigonométrique

EXERCICE 1

Convertir en radians les mesures données en degrés :

$$10^\circ \quad ; \quad 59^\circ \quad ; \quad 180^\circ \quad ; \quad 18^\circ \quad ; \quad 72^\circ \quad ; \quad 112,5^\circ$$

EXERCICE 2

Convertir en degré les mesures données en radians :

$$\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \pi \quad ; \quad \frac{5\pi}{4} \quad ; \quad \frac{3\pi}{8} \quad ; \quad \frac{5\pi}{12} \quad ; \quad \frac{3\pi}{2}$$

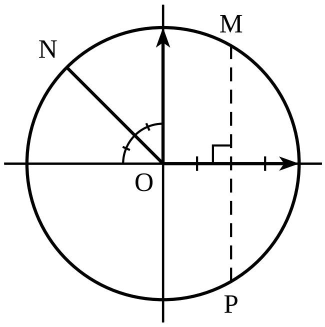
EXERCICE 3

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points images des angles en radians suivants :

1) π 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{3\pi}{2}$ 4) $\frac{\pi}{6}$ 5) $-\frac{\pi}{3}$ 6) $-\frac{3\pi}{4}$ 7) $\frac{5\pi}{6}$ 8) $-\frac{3\pi}{2}$

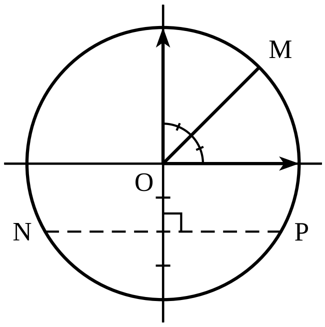
EXERCICE 4

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[0 \,;\, 2\pi]$ repérant les points M, N et P.



EXERCICE 5

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[-\pi \,;\, \pi]$ repérant les points M, N et P.



EXERCICE 6

Sur le cercle trigonométrique colorier les arcs décrits par les intervalle I, J et K tels que :

$$I = \left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4}\right] \quad ; \quad J = \left[\frac{4\pi}{3} ; \frac{13\pi}{6}\right] \quad ; \quad K = \left[-\frac{7\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4}\right]$$

Angle dans $]-\pi\,;\,\pi]$

Exercice 7

Dans chaque cas, trouver l'angle x dans $]-\pi\,;\,\pi]$ correspondant à l'angle α donné :

1) $\alpha = \dfrac{7\pi}{2}$ 2) $\alpha = -\dfrac{4\pi}{3}$ 3) $\alpha = \dfrac{35\pi}{6}$ 4) $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4}$ 5) $\alpha = \dfrac{202\pi}{3}$

Lignes trigonométriques

Exercice 8

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

1) $\dfrac{\pi}{6}$ 2) $\dfrac{5\pi}{6}$ 3) $\dfrac{7\pi}{6}$ 4) $\dfrac{11\pi}{6}$ 5) $\dfrac{13\pi}{6}$

Exercice 9

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

1) $\dfrac{\pi}{4}$ 2) $\dfrac{9\pi}{4}$ 3) $\dfrac{5\pi}{4}$ 4) $\dfrac{81\pi}{4}$ 5) $-\dfrac{108\pi}{4}$

Exercice 10

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

1) $\dfrac{4\pi}{3}$ 2) $\dfrac{\pi}{3}$ 3) $\dfrac{71\pi}{3}$ 4) $\dfrac{97\pi}{3}$ 5) $-\dfrac{54\pi}{3}$

Relations trigonométriques

Exercice 11

À l'aide de la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$:

1) Déterminer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \dfrac{2}{3}$ et $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$

2) Déterminer $\sin x$ sachant que : $\cos x = -\dfrac{1}{5}$ et $x \in [-\pi\,;\,0]$

3) Déterminer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$

Exercice 12

Dans chacun des cas suivants, calculer $\cos x$ ou $\sin x$.

1) $\sin x = -\dfrac{1}{4}$ et $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$. 2) $\cos x = \dfrac{3}{5}$ et $x \in \left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

3) $\cos x = -\dfrac{1}{3}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Exercice 13

Démontrer que pour tout réel x on a :

1) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
2) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$

Exercice 14

Exprimer à l'aide de $\sin x$ et $\cos x$, les expressions suivantes :

1) $\sin(-x) + \cos(-x)$
2) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$
3) $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
4) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$

Équations trigonométriques

Exercice 15

À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2) $\sin x = 0$
3) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

1) $2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$
2) $1 - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$
3) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
4) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

1) $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
2) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$
3) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
4) $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 18

Calcul de $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\cos \frac{\pi}{8}$

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O , I , J) du plan.
M est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$.

1) Faire une figure.
2) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O , I , J) ?

3) Calculer la distance IM.

4) a) Démontrer que : $\text{IM} = 2 \times \sin \dfrac{\pi}{8}$.

   b) En déduire la valeur exacte de $\sin \dfrac{\pi}{8}$.

5) Calculer la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{8}$.

6) Déduire les lignes trigonométriques de : $\dfrac{7\pi}{8}$, $\dfrac{9\pi}{8}$, $\dfrac{5\pi}{8}$ et $\dfrac{3\pi}{8}$.

Exercice 19

Calcul de $\sin \dfrac{\pi}{12}$ et $\cos \dfrac{\pi}{12}$

$\mathscr{C}$ est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O , I , J) du plan.
M est le point de $\mathscr{C}$ tel que $(\overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OM}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

1) Faire une figure

2) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O , I , J) ?

3) Calculer la distance IM.

4) a) Démontrer que : $\text{IM} = 2 \times \sin \dfrac{\pi}{12}$.

   b) En déduire la valeur exacte de $\sin \dfrac{\pi}{12}$.

   c) Montrer que l'on peut mettre $\sin \dfrac{\pi}{12}$ sous la forme $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

5) a) Calculer la valeur exacte de $\cos \dfrac{\pi}{12}$.

   b) Montrer que l'on peut mettre $\cos \dfrac{\pi}{12}$ sous la forme $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

6) Déduire les lignes trigonométriques de : $\dfrac{11\pi}{12}$, $\dfrac{13\pi}{12}$, $\dfrac{5\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12}$.

Études de fonctions

Exercice 20

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

1) Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que la fonction f est paire et 2π-périodique.
   En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction f.

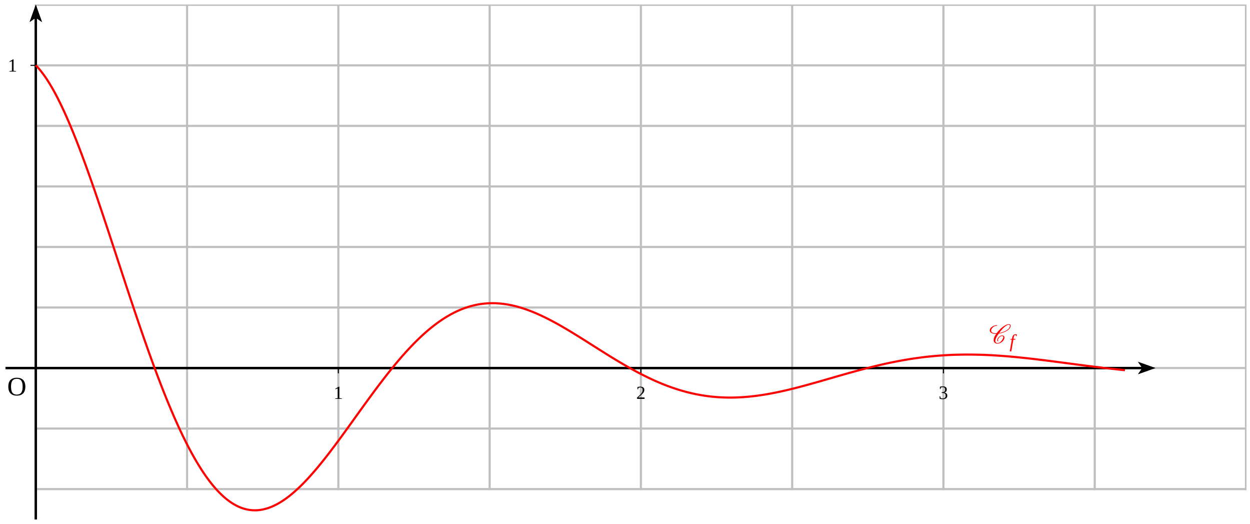
3) Calculer la fonction dérivée f' et déterminer son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$.

4) Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$ et tracer l'allure de la fonction sur $[-\pi\,;\, 3\pi]$

Exercice 21

Soit les fonctions f et g définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = e^{-x}\cos(4x)$ et $g(x) = e^{-x}$.

On a tracé $\mathscr{C}_f$ ci-dessous, la courbe représentative de la fonction f.



1) a) Montrer que : $\forall x \in [0\,;\,+\infty[,\quad -e^{-x} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}$.

   b) Que peut-on conjecturer pour les grandes valeurs de x ?

2) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

   a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

   b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4) a) Montrer que : $\forall x \in [0\,;+\infty[,\quad f'(x) = -e^{-x}\,[\cos(4x) + 4\sin(4x)]$.
   On rappelle que $[\cos(ax+b)]' = -a\sin(ax+b)$.

   b) En déduire que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite (T) tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$.
   Compléter le graphique ci-dessous en y traçant (T) et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 22

La fonction tangente

Soit la fonction tangente, notée tan, définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ par : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1) Expliquer pourquoi la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

2) a) Montrer que la fonction tangente est impaire et π-périodique.

   b) En déduire le plus petit intervalle d'étude de la fonction tangente.

3) a) Montrer que la dérivée de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ peut se mettre sous la forme : $\tan' x = 1 + \tan^2 x$.

   b) Que peut-on en déduire sur les variations de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

4) Déterminer la tangente (T_0) en 0 puis tracer la fonction tangente et (T_0) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

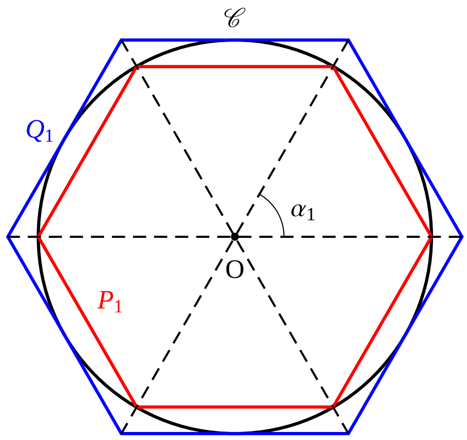
EXERCICE 23

Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Dans un texte intitulé « *De la mesure du cercle* », Archimède imagine la première méthode jamais proposée permettant, en théorie, le calcul de π avec une précision aussi grande qu'on le souhaite.

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1 : on construit, pour $n \geqslant 1$ deux polygones réguliers P_n, et Q_n , ayant 3×2^n côtés, P_n étant inscrit dans $\mathscr{C}$, et Q_n, exinscrit à $\mathscr{C}$ (voir la figure ci-contre).

Le périmètre du cercle ($= 2\pi$) est encadré par ces deux polygones. On note p_n et q_n, les demi-périmètres respectifs de P_n et Q_n. Ainsi, $p_n < \pi < q_n$



$n = 1$ (6 côtés)

1) Le cas $n = 1$
Montrer que $p_1 = 3$ et $q_1 = 2\sqrt{3}$.

2) Expression de p_n, et q_n

 a) Évaluer l'angle au centre α_n qui intercepte l'un des côtés de P_n en fonction de n.

 b) En déduire les relations : $p_n = 3\times 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$ et $q_n = 3\times 2^n \tan\left(\dfrac{\pi}{3\times 2^n}\right)$.

 En pratique, ces expressions ne permettent pas un calcul numérique de p_n et q_n. Dans la suite, nous nous orientons vers un calcul de proche en proche.

3) Relations de récurrence

 a) On pose $\beta_n = \dfrac{\pi}{3\times 2^{n+1}}$. Exprimer p_n et q_n, en fonction de n et β_n.

 b) On admet que : $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ et $1+\cos 2a = 2\cos^2 a$

 En déduire que, $\forall n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{q_n}\right)$ et $p_{n+1} = \sqrt{p_n q_{n+1}}$

 c) Calculer q_2 et p_2 à l'aide des relations précédentes.
 Quelle est la précision sur la valeur approchée de π ?

4) Algorithme.

 a) Proposer un algorithme permettant de calculer les valeurs de p_n et q_n jusqu'à obtenir un encadrement de n d'amplitude 10^{-6}. Donner l'encadrement de π ainsi obtenu.

 b) Proposer une fonction en Python qui donne le nombre d'itérations nécessaires pour obtenir un encadrement à 10^{-p} du nombre π, $p \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre d'itérations nécessaires pour fournir 3 décimales supplémentaire ? Cet algorithme est-il efficace pour connaître les décimales de π ?