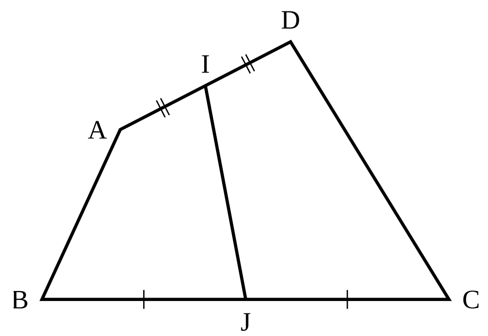
Produit scalaire
Géométrie repérée

Rappels sur les vecteurs

EXERCICE 1

ABCD est un quadrilatère quelconque, I le milieu de [AD] et J celui de [BC].

1) Écrire $\overrightarrow{IJ}$ comme la somme de $\overrightarrow{AB}$ et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
2) Décomposer le même $\overrightarrow{IJ}$ en utilisant $\overrightarrow{DC}$.
3) En déduire que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.



EXERCICE 2

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB] et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
2) Justifier les égalité : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
3) Quel théorème vous permet de conclure que O, I et J sont alignés ?

EXERCICE 3

ABC est un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I est tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que I, E et F sont alignés.

EXERCICE 4

ABCD est un parallélogramme, M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe (BC) en P. Il s'agit de trouver le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$. Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

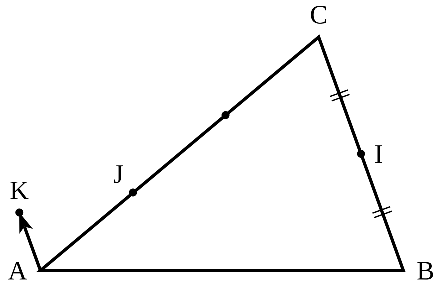
1) Calculer les coordonnées des points M, N et Q.
2) Justifier que P a pour coordonnées $(1\ ;\ k)$.
3) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires et calculer k.

Exercice 5

Sur la figure ci-contre, I est le milieu de [BC], J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Calculer les coordonnées de I, J et K puis prouver que I, J et K sont alignés.



Coordonnées et repère orthonormé

Exercice 6

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(-1\,;\,1)$, $B\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$, $C\left(-\frac{3}{4}; \frac{7}{6}\right)$

b) $A(-5; 2)$, $B(3\,;-1)$, $C(8\,;-3)$

Exercice 7

On donne les points $A(-2\,;\,3)$, $B(4\,;\,5)$, $C(27\,;\,9)$ dans le repère d'origine O. Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

Exercice 8

On donne les points $A(-3\,;\,1)$, $B(2\,;\,6)$, $C(2\,;-4)$ et $D(7\,;\,6)$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [DC].

Les points M et N sont définis par : $5\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$ et $5\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA}$

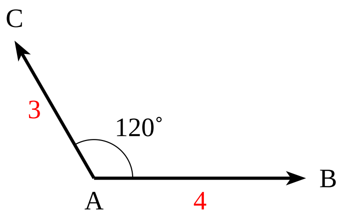
a) Calculer les coordonnées de I, J, M et N.

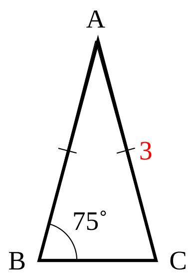
b) Le point K étant le milieu du segment [MN], démontrer que les point I, J et K sont alignés.

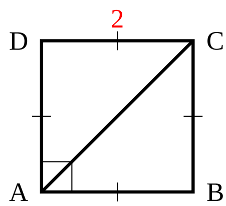
Produit scalaire

Exercice 9

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 3 figures.

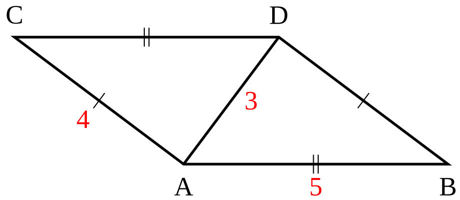


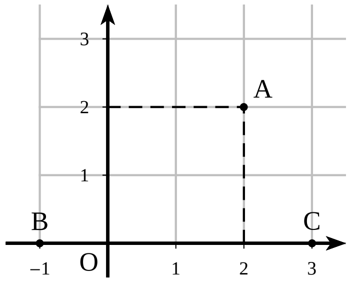




Exercice 10

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ pour les 2 figures :





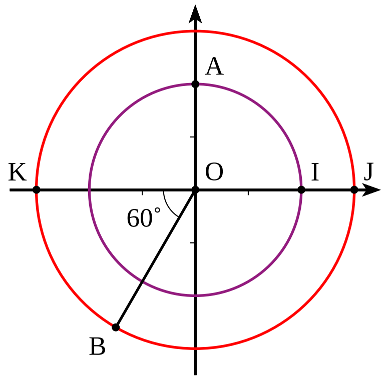
Exercice 11

Sur la figure ci-contre, on a tracé deux cercles de centre O et de rayons respectifs 2 et 3.

1) Calculer les produits scalaires suivants :

a) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OJ}$ c) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OB}$

b) $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OK}$ d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$



2) Prouver que dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les coordonnées de B sont $-\dfrac{3}{2}$ et $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, puis calculer :

a) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AI}$ b) $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IJ}$ c) $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BA}$

Exercice 12

À chacune des figures ci-dessous, associer, parmi les égalités suivantes, celle qui donne le bon résultat du calcul de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC$

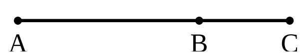
b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2$

c) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB^2$

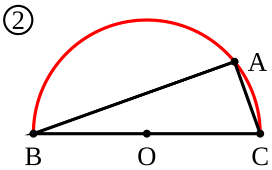
d) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}AB^2$

e) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

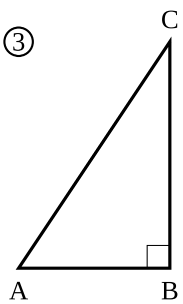
①



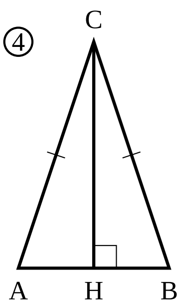
②



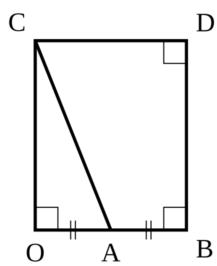
③



④



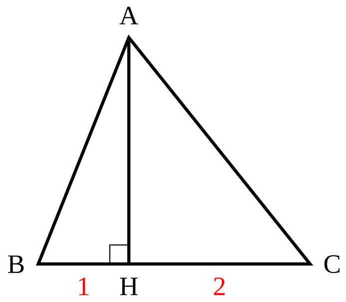
⑤



Exercice 13

Calculer les produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$$



Exercice 14

On donne trois points A(4 ; 1), B(0 ; 5) et C(−2 ; −1).

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

2) En déduire que $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et donner une mesure, à un degré près, de $\widehat{BAC}$.

Propriétés

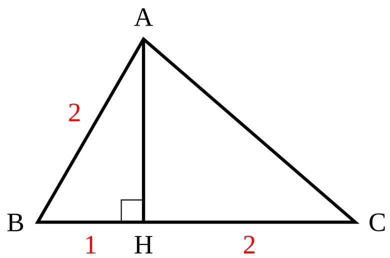
Exercice 15

En utilisant les renseignements portés sur la figure ci-contre, calculer les produits scalaires suivants :

a) $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$

b) $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) \cdot \overrightarrow{AB}$

c) $\left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right)$



Orthogonalité

Exercice 16

Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de m et déterminer le réel m pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

a) $\vec{u}\,(-5\,;\,2)$ et $\vec{v}\,(m\,;-2)$

b) $\vec{u}\,(m\,;\,3-m)$ et $\vec{v}\,(2\,;-m)$

c) $\vec{u}\,(m-4\,;\,2m+1)$ et $\vec{v}\,(2m\,;\,3-m)$

Exercice 17

On donne A(−4 ; 1), B(−1 ; 2) et C(1 ; −4).

1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

2) En déduire la nature du triangle ABC

Distance et angle

Exercice 18

On donne les trois points A(1 ; 3), B(−1 ; 1) et C(3 ; −2).

1) Calculer BC, puis $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
2) On note H le projeté orthogonal de A sur (BC).
   a) Exprimer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de H.
   b) Pourquoi H est-il un point du segment [BC] ?
   c) En déduire BH et HC.

Exercice 19

ABCD est un parallélogramme tel que :

$$AB = 4 \quad , \quad AD = 2 \quad \text{et} \quad \widehat{BAD} = 60°$$

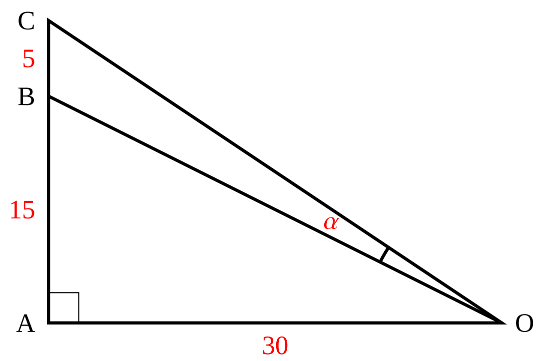
1) Démontrer que : $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 28$ et $(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})^2 = 12$
2) En déduire les longueur AC et BD, et une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

Exercice 20

1) A, B, C sont trois points alignés dans cet ordre. O est un point pris sur la perpendiculaire en A à la droite (AB). Démontrer que :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

2) Dans le cas de la figure ci-contre, calculer l'angle α.



Relations métriques dans un triangle

Exercice 21

ABC est un triangle. Dans chacun des cas suivants, calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles manquants.

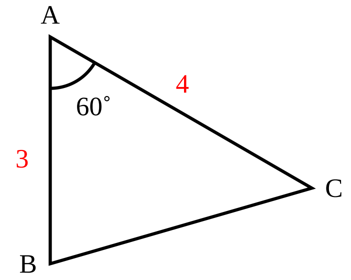
1) AB = 8, AC = 3 et $\widehat{BAC} = 60°$.
2) AB = 48, AC = 43 et BC = 35.

Exercice 22

Dans la figure ci-contre, calculer :

1) L'aire du triangle ABC.

2) Le périmètre du triangle ABC.



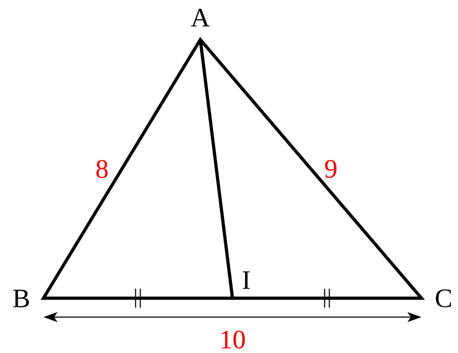
Exercice 23

On donne la figure ci-contre.

1) a) Exprimer $AB^2 + AC^2$ en fonction de AI et BC .

b) En déduire la longueur de la médiane AI.

2) Calculer les longueurs des deux autres médianes.



Exercice 24

L'aire d'un triangle ABC est $5\sqrt{3}$, $AB = 4$ et $\widehat{BAC} = 60°$

1) Calculer AC

2) Démontrer que $BC = \sqrt{21}$

Exercice 25

ABC triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -12\sqrt{3}$. L'unité est le cm.

1) Trouver, en radians, une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

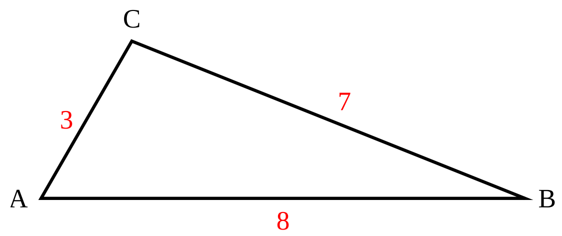
2) Trouver en cm^2, l'aire du triangle ABC.

Exercice 26

1) a) En précisant le théorème utilisé, calculer $\cos \widehat{BAC}$

b) En déduire $\sin \widehat{BAC}$

2) Quelle est l'aire du triangle ABC ?



Exercice 27

ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 7$ $AD = 3$ $AC = 8$

1) a) Démontrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3$

b) En calculant $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ d'une autre façon, trouver $\cos \widehat{BAD}$.

En déduire que : $\sin \widehat{BAD} = \dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

2) a) Calculer l'aire du triangle BAD.

b) En déduire l'aire du parallélogramme ABCD.

Ensemble de points

Exercice 28

A et B sont deux points tels que AB = 6.

(E_k) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$.

1) Construire, si possible, (E_k) dans chacun des cas suivants :

a) $k = -10$ b) $k = -5$ c) $k = 0$ d) $k = 7$

2) C est tel que ABC est un triangle équilatéral.
Comment choisir k pour que C soit un point de (E_k) ?

Exercice 29

ABC est un triangle rectangle en A.

1) Démontrer qu'il existe un unique point M distinct de A tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$ et $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
2) Quel point particulier obtient-on ?

Exercice 30

ABCD est un carré de côté 2 et de centre O. On note I le milieu de [AB].

1) Démontrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 2$ est la droite (OI).
2) Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$ est le cercle de centre I passant par C.

Exercice 31

ABC est un triangle quelconque.

1) Construire sur la même figure :

a) L'ensemble (E_1) des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

b) L'ensemble (E_2) des points M tels que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

2) Démontrer que (E_1) et (E_2) ont deux points communs ssi : $0 < \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < AB^2$.

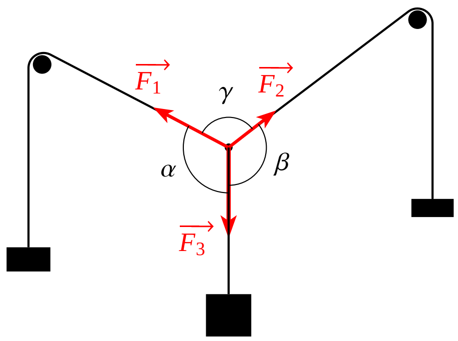
Application à la physique

Exercice 32

Le schéma ci-dessous représente un système de poulies à l'équilibre.

On donne les intensités des forces suivantes : $\|\overrightarrow{F_1}\| = 8\,\text{N}$, $\|\overrightarrow{F_2}\| = 6\,\text{N}$ et $\|\overrightarrow{F_3}\| = 12\,\text{N}$.

On note $\overrightarrow{R}$ la résultante des forces : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$.



1) Déterminer en fonction de α, β et γ les trois produits scalaires suivants :

$$\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_1} \quad ; \quad \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_2} \quad ; \quad \overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{F_3}$$

2) On suppose maintenant que le système est en équilibre, on a alors $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$.

a) Montrer que la mesure des angles vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} 4\cos\alpha + 3\cos\beta = -6 \\ 6\cos\alpha + 3\cos\gamma = -4 \\ 6\cos\beta + 4\cos\gamma = -3 \end{cases}$$

b) En déduire les angles α, β et γ. On donnera les valeurs exactes puis les valeurs approchées au dixième de degré près.

Équation cartésienne d'une droite

Exercice 33

On donne les coordonnées des points A et B, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans les cas suivants :

1) A(1 ; 5) et B(−3 ; 2)

2) A(3 ; 0) et B(0 ; 2)

3) A(4 ; 2) et B(4 ; −3)

4) A(2 ; −2) et B(4 ; −2)

Exercice 34

On donne une équation cartésienne de la droite d : $2x - 3y + 5 = 0$

1) a) Donner un vecteur directeur de la droite d.

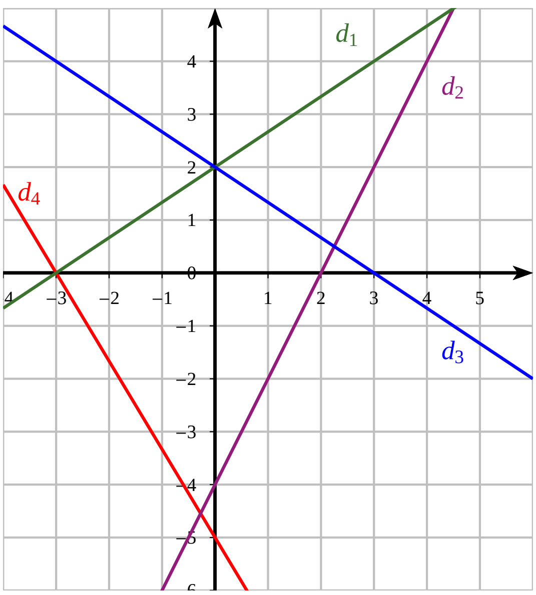
b) Quel est le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de son équation réduite ?

2) Le point A d'ordonnée $\dfrac{3}{2}$ est un point de d. Quelle est son abscisse ?

Exercice 35

Les droites d_1, d_2, d_3 et d_4 sont représentées ci-contre.

Déterminer une équation cartésienne pour chacune de ces droites.



Exercice 36

On donne les équations cartésiennes des droites d et d' suivantes :
$d \ : \ 7x - 3y + 2 = 0 \quad \text{et} \quad d' \ : \ 5x - 2y - 8 = 0$

1) Démontrer que les droites d et d' sont sécantes.
2) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

Exercice 37

Les droites d_1 et d_2 ont respectivement comme équation cartésienne
$d_1 \ : \ 3x - 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad d_2 \ : \ 5x + 4y - 6 = 0.$

La droite Δ a pour équation : $2mx - (m + 1)y - 8 = 0$

Comment choisir le paramètre m pour que ces trois droites soient concourantes ?

Exercice 38

Trouver une équation de la droite Δ passant par le point $\text{A}(-1;\ 4)$ et parallèle à la droite d d'équation $3x - 2y + 1 = 0$

Exercice 39

Pour quelle valeur du paramètre m la droite d d'équation $mx - 3y + 2 = 0$ est-elle parallèle à la droite Δ d'équation $3x - 2y + 4 = 0$

Vecteur normal

Exercice 40

d est la droite d'équation : $3x - y + 5 = 0$

1) Trouver un vecteur normal à d.
2) Trouver une équation de la droite Δ passant par $\text{A}(1; 2)$ et perpendiculaire à d.

Exercice 41

Dans chacun des cas suivants, dites si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires.

1) $d_1 \ : \ x - 2y + 4 = 0 \quad \text{et} \quad d_2 \ : \ 6x + 3y - 7 = 0$
2) $d_1 \ : \ y = 2x + 5 \quad \text{et} \quad d_2 \ : \ x - 2y + 1 = 0$
3) $d_1 \ : \ (1 + \sqrt{2})x - y + 3 = 0 \quad \text{et} \quad d_2 \ : \ (1 - \sqrt{2})x + y = 0$

Équation d'un cercle

Exercice 42

Trouver l'équation du cercle dans les cas suivants :

1) de centre $\text{A}(1\ ; -2)$ et de rayon 5 ;
2) de centre $\text{A}(-1\ ;\ 2)$ et passant par $\text{B}(3\ ;\ 4)$
3) de centre $\text{A}(1\ ; -4)$ et tangent à l'axe des abscisses

Exercice 43

Dans chacun des cas suivants, démontrer que l'équation proposée est celle d'un cercle dont on précisera les coordonnées du centre et le rayon :

1) $x^2 + y^2 - x - 3y - 5 = 0$
2) $(x-2)(x+5) + (y-1)(y-4) = 0$
3) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 1 = 0$

Exercice 44

Soit les points $\mathrm{I}(4\,;-1)$ et $\mathrm{A}(1\,;\,5)$. $\mathscr{C}$ est le cercle de centre I passant par A.
Démontrer que la droite d d"équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ est tangente en A au cercle $\mathscr{C}$

Exercice 45

On donne le point $\mathrm{A}(1\,;\,2)$ et la droite d d'équation $x + 2y = 0$.
Démontrer que le cercle de centre A passant par l'origine O est tangent à d.

Exercice 46

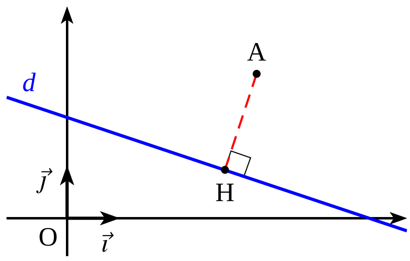
$\mathscr{C}$ est le cercle d'équation $x^2+y^2-4x+4y-2 = 0$ et d la droite d'équation $x+3y-6 = 0$

1) Faire une figure.
2) Vérifier les points $\mathrm{A}(3\,;\,1)$ et $\mathrm{B}(5\,;-1)$ appartiennent à $\mathscr{C}$
3) a) Le droite d est-elle tangente à $\mathscr{C}$ au point A ?
   b) Déterminer l'équation de la droite d' tangente à $\mathscr{C}$ en B.

Exercice 47

Distance d'un point à une droite

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on donne la droite d d'équation $ax+by+c = 0$ et le point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,;\,y_\mathrm{A})$. On appelle H le projeté orthogonal de A sur la droite d.



1) Le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a\,;\,b)$ est normal à d. Démontrer que :
$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}}\,| = \sqrt{a^2+b^2} \times \mathrm{AH}$$
2) $\mathrm{H}(x\,;\,y)$ est un point de d donc $ax + by + c = 0$.
   Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ et établir la formule :
$$\mathrm{AH} = \frac{|ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
3) **Applications**
   a) Un droite d a pour équation : $3x + 4y - 12 = 0$.
   Trouver une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $\mathrm{A}(5\,;3)$ tangent à d.
   b) La droite d' d'équation $x + y\sqrt{3} - 2 = 0$ est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 ?