Ordre. Inéquations du 1er degré. Valeur absolue

Paul Milan

LMA Seconde le 15 novembre 2012

Table des matières

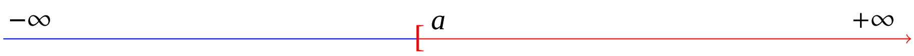
1 Intervalle dans $\mathbb{R}$

On peut distinguer deux sortes d'intervalles dans l'ensemble $\mathbb{R}$: une section commençante ou finissante et un encadrement. De plus, un intervalle pose la question de la frontière : la borne est-elle incluse ou excluse ?

1.1 Section commençante et section finissante

1.1.1 Section commençante : à partir de ...

Visualisons, sur la droite des réels, la proposition : $x \geqslant a$

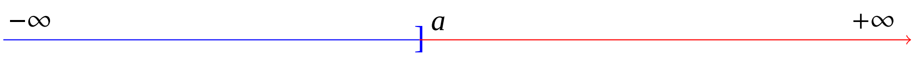


Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $x \geqslant a$ (en rouge) sont tous les nombres réels à partir de a inclus. L'ensemble des valeurs de x va donc de a inclus jusqu'à $+\infty$. On écrit alors :

$x \in [a\,,\,+\infty[$ "x appartient à l'intervalle a fermé, $+\infty$ "

On dit que le crochet devant a est fermé (tourné vers l'intérieur de la zone rouge) car a est inclus dans l'intervalle. En revanche le crochet devant $+\infty$ est ouvert (tourné vers l'extérieur) car $+\infty$ est exclus de l'intervalle. En effet $+\infty$ n'est pas un nombre réel.

Visualisons maintenant la proposition : $x > a$



Cette fois la valeur a est à exclure car x est strictement supérieur à a. Le crochet sera donc ouvert en a. On écrit donc :

$x \in]a\,,\,+\infty[$ "x appartient à l'intervalle a ouvert, $+\infty$ "

On ne précise jamais que $+\infty$ est ouvert car cela est toujours le cas

Définition 1 *Les deux cas d'une section commençante sont :*

$$x \geqslant a \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in [a\,,\,+\infty[$$

$$x > a \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in]a\,,\,+\infty[$$

Exemples

La proposition $x \geqslant 9$:

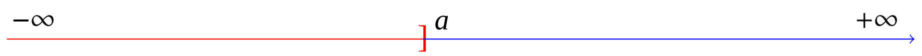
$$x \geqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [9\,,\,+\infty[$$

La proposition $x > -2$:

$$x > -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]2\,,\,+\infty[$$

Le symbole ⇔ signifie "est équilalent à"

1.1.2 Section finissante : jusqu'à ...

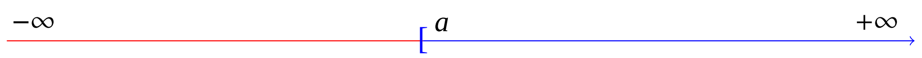


Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $x \leqslant a$ (en rouge) sont tous les nombres réels jusqu'à a inclus. L'ensemble des valeurs de x va donc de $-\infty$ jusqu'à a inclus. On écrit alors :

$$x \in]-\infty\,;\,a] \qquad \text{"}x \text{ appartient à l'intervalle } -\infty,\, a \text{ fermé"}$$

On dit que le crochet devant $-\infty$ est ouvert (tourné vers l'extérieur) car $-\infty$ est exclus de l'intervalle. En effet $-\infty$ n'est pas un nombre réel. On dit que le crochet devant a est fermé (tourné vers l'intérieur) car le nombre a est inclus dans l'intervalle.

Visualisons maintenant la proposition : $x < a$



Cette fois la valeur a est à exclure car x est strictement inférieur à a. Le crochet sera donc ouvert en a. On écrit donc :

$$x \in]-\infty\,;\,a[\qquad \text{"}x \text{ appartient à l'intervalle } -\infty,\, a \text{ ouvert"}$$

On ne précise jamais que $-\infty$ est ouvert car cela est toujours le cas

Définition 2 *Les deux cas d'une section finissante sont :*

$$x \leqslant a \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in]-\infty\,;\,a]$$

$$x < a \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in]-\infty\,;\,a[$$

Exemples

La proposition $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$:

$$x \leqslant -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty\,;\,-\frac{3}{2}\right]$$

La proposition $x < \sqrt{2}$:

$$x < \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]-\infty\,;\,\sqrt{2}\right[$$

1.2 Encadrement dans $\mathbb{R}$

Il y a quatre situations dans le cas d'un encadrement suivant que l'on prenne ou non les valeurs extrêmes.

1. Visualisons la proposition : $a \leqslant x \leqslant b$

   Les valeurs de de x qui correspondent à la proposition $a \leqslant x \leqslant b$ (en rouge) sont tous les nombres réels compris entre a et b inclus. On écrit alors :

   $$x \in [a\,;\,b] \qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle fermé } a, b \text{ "}$$

2. Visulalisons la proposition : $a < x < b$

   Les valeurs de x qui correspondent à $a < x < b$ (en rouge) sont tous les nombres réels compris entre a et b cette fois exclus. On écrit alors :

   $$x \in]a\,;\,b[\qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle ouvert } a, b \text{ "}$$

3. Visulalisons la proposition : $a \leqslant x < b$

   Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $a \leqslant x < b$ sont tous les nombres réels compris entre a inclus et b exclus. On écrira donc :

   $$x \in [a\,;\,b[\qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle } a \text{ fermé, } b \text{ ouvert "}$$

4. Visualisons enfin le dernier cas : $a < x \leqslant b$

   Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $a < x \leqslant b$ sont tous les nombres réels compris entre a exclus et b inclus. On écrira donc :

   $$x \in]a\,;\,b] \qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle } a \text{ ouvert, } b \text{ fermé "}$$

Définition 3 *Les quatre cas d'encadrement correspondent aux situations suivantes :*

$$a \leqslant x \leqslant b \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in [a\,;\,b]$$

$$a < x < b \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in]a\,;\,b[$$

$$a \leqslant x < b \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in [a\,;\,b[$$

$$a < x \leqslant b \quad \textit{qui revient à écrire} \quad x \in]a\,;\,b]$$

Exemples

La proposition $2 \leqslant x \leqslant 5$:

$$2 \leqslant x \leqslant 5 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [2\,;\,5]$$

La proposition $-7 < x < 3$:

$$-7 < x < 3 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-7\,;\,3[$$

La proposition $\dfrac{3}{4} \leqslant x < \dfrac{10}{3}$

$$\frac{3}{4} \leqslant x < \frac{10}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{3}{4}\,;\,\frac{10}{3}\right[$$

La proposition $0 < x \leqslant \sqrt{3}$

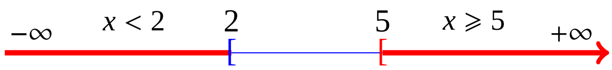
$$0 < x \leqslant \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left]0\,;\,\sqrt{3}\right]$$

1.3 Union d'intervalles et intervalles particuliers

Lorsqu'un ensemble de nombre est composé de plusieurs parties, il est nécessaire de relier les différents intervalles qui le composent. Nous disposons alors d'un symbole $\cup$ qui signifie "*union*" pour écrire cet ensemble. Sa signification en français est "*ou*" dans un sens non exclusif.

Exemple

Soit l'ensemble défini par $x < 2$ ou $x \geqslant 5$
Il s'agit d'une section finissante et d'une section commençante.
Visualisons sur la droite des réel :



L'ensemble visualisé par la partie rouge s'écrit alors :

$$]-\infty\,;\,2\,[\,\cup\,[\,5\,;\,+\infty[$$

Des ensembles particuliers, qui s'utilisent souvent ont des notation particulières.

$\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ correspond à l'ensemble des réels privé du nombre 0. Il peut s'écrire :

$$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty[$$

$\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ correspondent respectivement aux réels positifs ou nuls et aux réels négatifs ou nuls. Ils peuvent s'écrire :

$$\mathbb{R}_+ = [\,0\,;\,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_- =]-\infty\,;\,0\,]$$

Enfin, on peut avoir $\mathbb{R}^*_+$ ou $\mathbb{R}^*_-$ qui correspondent respectivement à :

$$\mathbb{R}^*_+ =]\,0\,;\,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^*_- =]-\infty\,;\,0\,[$$

2 Inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}$

2.1 Définition

Définition 4 *On appelle inéquation à une inconnue une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de cette inconnue, dont on se propose de déterminer les valeurs.*

Exemples

Des inéquations du 1er degré :

$$x - 3 < 5x + 1 \quad \text{et} \quad 5x - 7 \geqslant 0$$

Des inéquations du 2nd degré :

$$x^2 - 2x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad (x+7)^2 > (x+1)(x+7)$$

Remarques

On classe les inéquations, comme les équations suivant le degré de l'inconnue car la résolution dépend du degré de l'inconnue. Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'intervalle ou l'union d'intervalles des valeurs de l'inconnue qui vérifient celle-ci.

2.2 Règles de résolution

Comme pour l'équation du 1er degré, la résolution d'une équation du 1er degré se fait en deux étapes : isoler l'inconnue puis diviser lorsque cela est possible. On a ainsi les deux règles suivantes :

Règle 1 *On ne change pas une inéquation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'inégalité.*

Exemple 1

D'après la règle 1, on peut isoler l'inconnue :

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\geqslant x + 5 \\ 3x - x &\geqslant 2 + 5 \\ 2x &\geqslant 7 \end{aligned}$$

Exemple 2

Toujours d'après la règle 1 :

$$\begin{aligned} x - 3 &< 5x + 1 \\ x - 5x &< 3 + 1 \\ -4x &< 4 \end{aligned}$$

Règle 2 *On ne change pas la relation d'ordre si l'on multiplie ou divise par un même nombre* **positif** *chaque côté de l'inéquation.*
On **inverse** *la relation d'ordre si l'on multiplie ou divise par un même nombre* **négatif** *chaque côté de l'inéquation.*

Remarque

Cette règle marque une petite différence avec la résolution d'une équation car, suivant que l'on divise une inéquation par un nombre positif ou négatif, on laisse ou on inverse la relation d'ordre. Cette règle d'inversion est liée à la symétrie, par rapport à zéro, des nombres positifs et des nombres négatifs. En effet $2 < 5$ mais $-2 > -5$.

Exemple 1

Reprenons le 1er exemple donné avec la règle 1.

$$2x \geqslant 7$$

On divise par 2 qui est positif, on laisse la relation d'ordre, on a donc :

$$x \geqslant \frac{7}{2}$$

On conclut par l'intervalle solution :

$$S = \left[\frac{7}{2}\ ;\ +\infty\right[$$

Exemple 2

Dans le 2nd exemple, on doit diviser par -4, on inverse alors la relation d'ordre, d'où :

$$-4x < 4$$
$$x > \frac{4}{-4}$$
$$x > -1$$
$$S =]-1\ ;\ +\infty[$$

Attention les deux erreurs classiques consistent à oublier d'inverser la relation d'ordre ou à oublier la solution sous forme d'intervalle

2.3 Quelques exemples de résolution

Voici trois exemples de résolution :

Exemple 1

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$2(x-1)-3(x+1) > 4(3x-2)$$

Comme pour les équations, on enlève les parenthèses puis on isole l'inconnue, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 2x-2-3x-3 &> 12x-8 \\ 2x-3x-12x &> 2+3-8 \\ -13x &> -3 \end{aligned}$$

On divise par -13, on change donc la relation d'ordre, ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &< \frac{-3}{-13} \\ x &< \frac{3}{13} \end{aligned}$$

On conclut par l'intervalle solution

$$S = \left] -\infty\,;\, \frac{3}{13} \right[$$

Exemple 2

Soit l'inéquation à résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{3x-1}{4} \leqslant \frac{5x+1}{6}$$

On multiplie par le dénominateur commun, ici 12, ce qui donne :

$$\begin{aligned} 3(3x-1) &\leqslant 2(5x+1) \\ 9x-3 &\leqslant 10x+2 \\ 9x-10x &\leqslant 3+2 \\ -x &\leqslant 5 \end{aligned}$$

On inverse la relation d'ordre car on change les signes de chaque côté de l'inéquation, on obtient alors :

$$x \geqslant -5$$

On conclut par l'intervalle solution :

$$S = [\,-5\,;\,+\infty\,[$$

Exemple 3

Un dernier exemple avec des parenthèses et des fractions.

$$\frac{5}{3}(2x+1)-\frac{1}{2}(x-2)<\frac{7}{6}(x+2)$$

On multiplie par le dénominateur commun, ici 6, ce qui donne :

$$\begin{aligned}10(2x+1)-3(x-2) &< 7(x+2)\\ 20x+10-3x+6 &< 7x+14\\ 20x-3x-7x &< -10-6+14\\ 10x &< -2\end{aligned}$$

On divise par 10, on ne change pas la relation d'ordre, on obtient alors :

$$\begin{aligned}x &< \frac{-2}{10}\\ x &< -\frac{1}{5}\end{aligned}$$

On conclut par l'intervalle solution :

$$S=\left]-\infty\,;\,-\frac{1}{5}\right[$$

2.4 Inéquations particulières

Voici deux exemples d'inéquations impossibles ou toujours vraies.

Exemple 1

Soit l'inéquation suivante :

$$-x+4(x-1)\leqslant 3x$$

On isole l'inconnue :

$$\begin{aligned}-x+4x-4 &\leqslant 3x\\ -x+4x-3x &\leqslant 4\end{aligned}$$

On s'aperçoit en regroupant les x qu'il n'y en a plus. On convient comme pour les équations d'écrire $0x$, ce qui donne :

$$0x\leqslant 4$$

On a donc $0\leqslant 4$, ce qui est toujours vrai, quelque soit les valeurs de x. On conclut alors par :

$$S=\mathbb{R}$$

Exemple 2

Un autre exemple :

$$4(x-3)-(3x-10) > x+5$$

On isole l'inconnue :

$$\begin{aligned} 4x-12-3x+10 &> x+5 \\ 4x-3x-x &> 12-10+5 \\ 0x &> 7 \end{aligned}$$

On a donc $0 > 7$ ce qui est faux quelque soit les valeurs de x, on conclut donc par :

$$S = \varnothing$$

Remarque

Beaucoup de cas de figure peuvent se présenter, dans les inéquations, où l'on obtient $0x$. Il faudra dans chaque cas réfléchir pour savoir si l'on se situe dans un cas toujours vrai (exemple 1) ou dans un cas impossible (exemple 2).

2.5 Résumé

Règle 3 *Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :*

$$ax \leqslant b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geqslant b \quad , \quad ax > b$$

Si $a \neq 0$ on obtient soit une section finissante, soit une section commençante.
Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible.

3 Signe du binôme $ax+b$

L'objet de ce paragraphe est de se préparer à la résolution d'inéquation se ramenant au 1er degré, soit par une factorisation, soit dans le cas d'inéquations rationnelles.

3.1 Règle pour déterminer le signe du binôme $ax+b$

On cherche à déterminer, lorsque x varie sur l'ensemble $\mathbb{R}$, le signe de l'expression $ax+b$. Du fait de la règle n°2, le signe va dépendre du signe du coefficient a.

3.1.1 Le coefficient a est positif

Déterminons, suivant les valeurs de x, quand l'expression $ax+b$ est positive, nulle et négative.

$$ax+b>0 \quad \text{soit} \quad ax > -b \quad \text{et donc} \quad x > -\frac{b}{a}$$

On remarquera que comme $a > 0$, on ne change pas la relation d'ordre lorsque l'on divise par a

$$ax + b = 0 \quad \text{soit} \quad ax = -b \quad \text{et donc} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \quad \text{soit} \quad ax < -b \quad \text{et donc} \quad x < -\frac{b}{a}$$

Nous pouvons alors résumer les résultats dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

Remarque Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'expression $ax + b$ est d'abord négative, nulle puis positive.

3.1.2 Le coefficient a est négatif

Déterminons, suivant les valeurs de x, quand l'expression $ax + b$ est positive, nulle et négative.

$$ax + b > 0 \quad \text{soit} \quad ax > -b \quad \text{et donc} \quad x < -\frac{b}{a}$$

On remarquera que comme $a < 0$, on change la relation d'ordre lorsque l'on divise par a :

$$ax + b = 0 \quad \text{soit} \quad ax = -b \quad \text{et donc} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \quad \text{soit} \quad ax < -b \quad \text{et donc} \quad x > -\frac{b}{a}$$

Nous pouvons alors résumer les résultats dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$+$	0	$-$	

Remarque Lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'expression $ax + b$ est d'abord positive, nulle puis négative.

3.2 Exemples

Voici, à l'aide de deux exemples les deux cas de figures qui l'on vient de traiter.

Exemple 1

Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe de $3x - 7$.

On détermine ce qu'on appelle la valeur frontière, c'est à dire la valeur de x qui annule la quantité $3x - 7$.

$$3x - 7 = 0 \quad \text{soit} \quad 3x = 7 \quad \text{donc} \quad x = \frac{7}{3}$$

Comme $a = 3$, le coefficient est positif, donc la quantité est d'abord négative, nulle puis positive. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$3x - 7$		$-$	0	$+$	

Exemple 2

Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe de $-5x + 9$.

On détermine la valeur frontière, c'est à dire la valeur de x qui annule la quantité $-5x + 9$.

$$-5x + 9 = 0 \quad \text{soit} \quad -5x = -9 \quad \text{donc} \quad x = \frac{9}{5}$$

Comme $a = -5$, le coefficient est négatif, donc la quantité est d'abord positive, nulle puis négative. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{9}{5}$		$+\infty$
$-5x + 9$		$+$	0	$-$	

3.3 Résumé

Le signe du binôme $ax+b$ dépend du signe du coefficient a. Si $a > 0$, la quantité $ax+b$ sera d'abord négative (signe de $-a$), nulle puis positive (signe de a). Si $a < 0$, la quantité $ax + b$ sera d'abord positive (signe de $-a$), nulle puis négative (signe de a). On peut ainsi résumé les deux cas de figure dans un tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		Signe de $-a$	0	Signe de a	

4 Inéquations se ramenant au 1er degré

4.1 Trois résolutions d'inéquations par une factorisation

4.1.1 Résoudre l'inéquation suivante : $(5x+2)(3-2x) \geqslant 0$

Le problème revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles le produit de facteurs est positif ou nul. Si on se réfère à la règle des signes, le produit est positif si et seulement si les deux facteurs sont du même signe (soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs).

Remarque

Le fait que les deux facteurs soient positifs entraîne bien que le produit soit positif, mais ce n'est pas la seule solution. Les deux facteurs négatifs (– par –) entraînent aussi un produit positif.

Nous sommes donc amenés à résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x+2 \geqslant 0 \\ 3-2x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5x+2 \leqslant 0 \\ 3-2x \leqslant 0 \end{cases}$$

Nous pourrions alors résoudre ces deux systèmes et nous aurions alors la solution à notre inéquation mais cela est un peu fastidieux. Nous pouvons penser notre problème autrement. Au lieu de nous préoccuper tout de suite du signe positif de notre produit, nous allons nous poser la question : " Quel est le signe du produit suivant les valeurs de x ? " Ensuite nous ne retiendrons que les valeurs de x qui rendent notre produit positif ou nul. La méthode consiste donc à superposer deux tableaux correspondants aux signes des quantités $5x+2$ et $3-2x$ puis d'appliquer la règle des signes pour obtenir celui du produit. Cela donne :

1. On détermine les valeurs qui annulent le produit, c'est à dire les valeurs frontières :

$$5x+2=0 \quad \text{donc} \quad x = -\frac{2}{5}$$

$$3-2x=0 \quad \text{donc} \quad x = \frac{3}{2}$$

2. On remplit le tableau suivant :
   a) On place les valeurs frontières en les ordonnant de la plus petite à la plus grande.
   b) On place ensuite les "0".
   c) On remplit les signes de la ligne de $5x+2$ en utilisant la règle du signe du binôme. On a d'abord – puis 0 puis + car le coefficient $a = 5$ est positif.
   d) On remplit les signes de la ligne de $3-2x$ en utilisant la règle du signe du binôme. On a d'abord + puis 0 puis – car le coefficient $a = -2$ est négatif.
   e) Pour remplir la dernière ligne, on détermine les signes en appliquant la règle des signes verticalement (les deux signes qui sont au-dessus).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(5x+2)(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Il ne nous reste plus qu'à choisir les valeurs de x pour lesquelles notre produit $(5x+2)(3-2x)$ est positif ou nul. En regardant la dernière ligne du tableau puis en se raportant à la première pour trouver les valeurs de x correspondantes, on observe :

$$(5x+2)(3-2x) \geqslant 0 \quad \text{si et seulement si} \quad x \in \left[-\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$$

On conclut par :

$$S = \left[-\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$$

4.1.2 Résoudre l'inéquation suivante : $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$

L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

1. On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x-5)(x-2) - (x-5)(2x-3) < 0$$

2. On factorise par $(x-5)$:

$$\begin{aligned} (x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right] &< 0 \\ (x-5)(x-2-2x+3) &< 0 \\ (x-5)(-x+1) &< 0 \end{aligned}$$

   Nous sommes revenus à la forme factorisée de l'exemple précédent. On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières.

3. Valeurs frontières :

$$\begin{array}{rcccc} x-5=0 & \text{donc} & x=5 & & \\ -x+1=0 & \text{donc} & -x=-1 & \text{d'où} & x=1 \end{array}$$

4. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

5. En conclusion pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités :

$$x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5$$

   La solution est donc :

$$S =]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,5\,;\,+\infty\,[$$

4.1.3 Résoudre $(3x-2)^2 > (x-1)^2$

Remarque

On pourrait être tenté de supprimer les carrés de chaque côté de la relation d'ordre, c'est à dire d'écrire $3x-2 > x-1$. On obtiendrait une partie de la solution, mais pas toute la solution. En supprimant les carrés, on change l'énoncé. On procédera donc de la même manière que l'exemple précédent.

1. On annule le second terme, on a donc :

$$(3x-2)^2-(x-1)^2 > 0$$

2. On factorise la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}[(3x-2)-(x-1)]\,[(3x-2)+(x-1)] &> 0\\ (3x-2-x+1)(3x-2+x-1) &> 0\\ (2x-1)(4x-3) &> 0\end{aligned}$$

3. On cherche les valeurs frontières :

$$2x-1=0 \quad \text{donc} \quad 2x=1 \quad \text{d'où} \quad x=\frac{1}{2}$$

$$4x-3=0 \quad \text{donc} \quad 4x=3 \quad \text{d'où} \quad x=\frac{3}{4}$$

4. On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$4x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-1)(4x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. En conclusion pour que le produit soit strictement positif, nous avons deux possibilités :

$$x<\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x>\frac{3}{4}$$

La solution est donc :

$$S=\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[\,\cup\,\left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$$

4.2 Deux inéquations rationnelles se ramenant au premier degré

4.2.1 Résoudre l'inéquation $\dfrac{8-2x}{x+5} \geqslant 0$

Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire des valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de x qui annulent le dénominateur.

1. Valeur interdite et ensemble de définition :
   Le dénominateur est nul si $x + 5 = 0$ soit $x = -5$
   On a donc l'ensemble de définition D suivant :
$$D = \mathbb{R} - \{-5\}$$
2. Le signe du quotient sur l'ensemble de définition est le même que celui du produit. On cherche donc les valeurs frontières.
$$\begin{array}{rcrcl} 8 - 2x = 0 & \text{donc} & -2x = -8 & \text{d'où} & x = 4 \\ x + 5 = 0 & \text{donc} & x = -5 & & \end{array}$$
3. Par convention une valeur interdite, ici $x = 5$, se note dans un tableau de signes par une double barre. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$8 - 2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x + 5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{8 - 2x}{x + 5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

4. En conclusion pour que le quotient soit positif ou nul, on a donc :
$$-5 < x \leqslant 4$$
   La solution est donc :
$$S =]-5\,;\,4]$$

4.2.2 Résoudre l'inéquation $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

1. Valeur interdite et ensemble de définition :
   Le dénominateur est nul si $x + 1 = 0$ soit $x = -1$
   On a donc l'ensemble de définition D suivant :
$$D = \mathbb{R} - \{-1\}$$
2. On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :
$$\frac{4}{x+1} - 3 \leqslant 0$$
$$\frac{4 - 3x - 3}{x+1} \leqslant 0$$
$$\frac{-3x + 1}{x+1} \leqslant 0$$

3. On cherche les valeurs frontières :

$$-3x+1=0 \quad \text{donc} \quad -3x=-1 \quad \text{d'où} \quad x=\frac{1}{3}$$
$$x+1=0 \quad \text{donc} \quad x=-1$$

4. On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{-3x+1}{x+1}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

5. En conclusion pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$$x<-1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{1}{3}$$

La solution est donc :

$$S=\left]-\infty\,;\,-1\right[\ \cup\ \left[\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$$

5 Valeurs absolues

La notion de valeur absolue est utilisée lorsque l'on s'intéresse à la valeur d'un nombre sans son signe. C'est à dire que l'on ne considère par exemple dans -5 que le nombre 5. Bien sûr lorsque l'on considère un nombre positif, par exemple 21, comme le signe + est omis la valeur absolue ne change rien.

5.1 Définitions

Définition 5 *On appelle valeur absolue d'un nombre réel x, le nombre noté $|x|$ tel que :*

$$|x|=x \quad si \quad x \geqslant 0$$
$$|x|=-x \quad si \quad x<0$$

Exemple

La valeur absolue peut par exemple traduire la distance d'un nombre à l'origine "0".

$$|-5|=5 \quad \text{représente la distance de } -5 \text{ à } 0$$

$$|21|=21 \quad \text{représente la distance de 21 à 0}$$

Remarque

On pourrait considérer d'autres applications comme lorsque l'on s'intéresse à l'intensité d'une force en physique et que l'on ignore si celle-ci est motrice ou résistante.

$$|F| = 5\text{N}$$

Conséquence

Comme le signe dans une valeur absolue n'intervient pas on a :

$$|a - b| = |b - a|$$

Définition 6 *La distance d'un nombre x à un nombre a est égale à : $|x - a|$.*

Exemples

La distance d'un nombre x à 2 est égale à : $|x - 2|$

La distance d'un nombre x à -5 est égale à : $|x - (-5)| = |x + 5|$

5.2 Égalité de deux valeurs absolues

Règle 4 *L'égalité $|a| = |b|$ est équivalente à : $a = b$ ou $a = -b$*

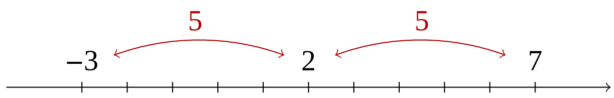
Remarque

Cela découle du fait que par exemple $|5| = |-5|$

Exemple 1

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est égale à 5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous trouvons donc comme solution −3 et 7.

Résolvons notre problème algébriquement.

La distance de x à 2 est égale à : $|x-2|$, donc le problème revient à résoudre :

$$|x-2| = 5$$

D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :

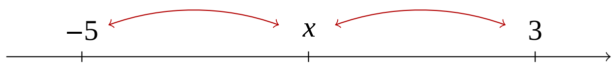
$$\begin{array}{rclcrcl} x-2 &=& 5 & \text{ou} & x-2 &=& -5 \\ x &=& 5+2 & \text{ou} & x &=& -5+2 \\ x &=& 7 & \text{ou} & x &=& -3 \end{array}$$

$$S = \{-3; 7\}$$

Exemple 2

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 3 est égale à la distance de x à -5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous nous apercevons que x doit être au milieu de l'intervalle $[-5\ ;\ 3]$

La solution est donc : $x = \dfrac{-5+3}{2} = -1$

Résolvons notre problème algébriquement.

La distance de x à 3 est égale à : $|x-3|$
La distance de x à -5 est égale à : $|x-(-5)| = |x+5|$
Donc le problème revient à résoudre :

$$|x-3| = |x+5|$$

D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :

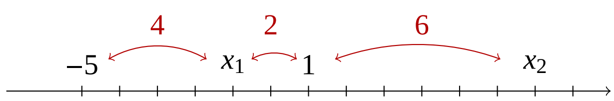
$$\begin{array}{rcr} x-3 = x+5 & \text{ou} & x-3 = -x-5 \\ 0x = 5+3 & \text{ou} & 2x = -5+3 \\ \text{impossible} & \text{ou} & x = -1 \end{array}$$

$$S = \{-1\}$$

Exemple 3

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles deux fois la distance de x à 1 est égale à la distance de x à -5.

Visualisons ce problème sur la droite des réels.



Graphiquement, nous nous apercevons qu'il y a deux positions de x possibles.

- soit x est dans l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$ donc x se trouve aux deux tiers de la distance de -5 à 1 :

$$x_1 = -5 + \frac{2(1-(-5))}{3} = -5+4 = -1$$

- soit x se trouve à l'extérieur de l'intervalle $[-5\ ;\ 1]$, donc 1 est au milieu de -5 et x_2 :

$$x_2 = 1 + (1-(-5)) = 1+6 = 7$$

Exemple 3

Résolvons notre problème algébriquement.

La distance de x à 1 est égale à : $|x - 1|$

La distance de x à -5 est égale à : $|x - (-5)| = |x + 5|$

Donc le problème revient à résoudre :

$$2\,|x - 1| = |x + 5|$$

D'après notre règle, on a donc les égalités suivantes :

$$\begin{array}{rcl} 2(x-1) = x+5 & \text{ou} & 2(x-1) = -x-5 \\ 2x-2 = x+5 & \text{ou} & 2x-2 = -x-5 \\ 2x-x = 2+5 & \text{ou} & 2x+x = 2-5 \\ x = 7 & \text{ou} & x = -\dfrac{3}{3} = -1 \end{array}$$

$$S = \{-1\,;\ 7\}$$

Remarque

On s'aperçoit sur ce dernier exemple que la résolution graphique peut être plus compliqué que la résolution algébrique, contrairement à ce que laissaient supposer les 2 exemples précédents. C'est là que la puissance de l'algèbre prend toute sa valeur.

5.3 Intervalles définis par une valeur absolue

5.3.1 Intervalle centré

Étudions à l'aide de deux exemples les cas que l'on peut résumer par :

$$|x - a| \leqslant b \quad \text{ou} \quad |x - a| < b \quad \text{avec} \quad b > 0$$

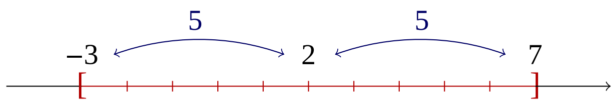
Exemple 1

Prenons l'intervalle défini par :

$$|x-2| \leqslant 5$$

Cela revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 2 est inférieure ou égale à 5

Visualisons cet intervalle sur la droite des réels :



On obtient alors l'intervalle $[-3\ ;\ 7]$. On dit que 2 est le centre et 5 le rayon de l'intervalle.

Résolvons algébriquement cet encadrement :

$$-5 \leqslant x-2 \leqslant 5$$

On fait passer le -2 à l'extérieur de l'intervalle, il change donc de signe :

$$-5+2 \leqslant x \leqslant 5+2$$

$$-3 \leqslant x \leqslant 7$$

Nous retrouvons donc l'intervalle $[-3\ ;\ 7]$.

Règle 5 *Un intervalle peut être donné sous la forme :*

$$|x-a| \leqslant b \quad ou \quad |x-a| < b \quad avec \quad b > 0$$

Pour trouver cet intervalle, on résout l'encadrement :

$$-b \leqslant x-a \leqslant b \qquad ou \qquad -b < x-a < b$$

Les nombres a et b représentent respectivement le centre et le rayon de cet l'intervalle.

Exemple 2

On donne l'intervalle $]2\ ;\ 10[$. Déterminer cet intervalle avec une valeur absolue.

On détermine alors le centre c et le rayon r de l'intervalle :

$$c = \frac{10+2}{2} = 6$$

$$r = 10-6 = 4$$

Comme 2 et 10 sont exclus de l'intervalle, l'inégalité sera stricte, on obtient donc :

$$|x-6| < 4$$

5.3.2 Union d'intervalles

Étudions à l'aide de deux exemples les cas que l'on peut résumer par :

$$|x - a| \geqslant b \quad \text{ou} \quad |x - a| > b \quad \text{avec} \quad b > 0$$

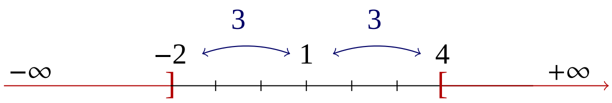
Exemple 1

Prenons l'inégalité défini par :

$$|x - 1| \geqslant 3$$

Cela revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la distance de x à 1 est supérieure ou égale à 3.

Visualisons cet intervalle sur la droite des réels :



On obtient alors l'union d'intervalle suivant

$$]-\infty\,;\,-2] \cup [4\,;\,+\infty[$$

On dit que 1 est le centre et 3 le rayon de cette union d'intervalles.

Résolvons algébriquement cette inéquation :

$$|x - 1| \geqslant 3$$

x est soit au delà de 1 ce qui se traduit par $x - 1 \geqslant 3$ soit x est en deçà de 1 ce qui se traduit par $x - 1 \leqslant -3$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} x - 1 \geqslant 3 & \text{ou} & x - 1 \leqslant -3 \\ x \geqslant 3 + 1 & \text{ou} & x \leqslant 1 - 3 \\ x \geqslant 4 & \text{ou} & x \leqslant -2 \end{array}$$

Nous retrouvons donc l'union d'intervalles :

$$]-\infty\,;\,-2] \cup [4\,;\,+\infty[$$

Règle 6 *L'inéquation :*

$$|x - a| \geqslant b \quad \textit{avec} \quad b > 0$$

revient à résoudre :

$$x - a \geqslant b \quad \textit{ou} \quad x - a \leqslant -b$$

De même, l'inéquation :

$$|x - a| > b \quad \textit{avec} \quad b > 0$$

revient à résoudre :

$$x - a > b \quad \textit{ou} \quad x - a < -b$$

On obtient alors une union d'intervalles dont les nombres a et b représentent respectivement le centre et le rayon.

Exemple 2

On donne l'union d'intervalles $]-\infty\,;\ 2[\,\cup\,]10\,;\ +\infty[$.
Déterminer cette union d'intervalles à l'aide d'une valeur absolue.

On détermine alors le centre c et le rayon r :

$$c = \frac{10 + 2}{2} = 6$$

$$r = 10 - 6 = 4$$

Comme 2 et 10 sont exclus de l'intervalle, l'inégalité sera stricte, on obtient donc :

$$|x - 6| > 4$$