Exercices sur la fonction carrée et la fonction inverse

EXERCICE 1

Fonction carrée

1) f est la fonction carrée. Calculer les images par f des nombres suivants :

a) 4 b) 100 c) 0 d) $-\dfrac{3}{4}$ e) $0,1$

2) f est la fonction carrée et $\mathscr{P}$ sa parabole représentative. Expliquer graphiquement puis algébriquement pourquoi :

a) il existe deux réels qui ont 4 comme image par f.

b) il n'existe pas d'image pour -1

3) f est la fonction carrée. Déterminer les antécédents par f, lorsque cela est possible, de chacun des réels suivants :

a) 1 b) -4 c) 0 d) $\dfrac{5}{4}$ e) 100

4) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction carrée sur l'intervalle I suivant en précisant la fenêtre utilisée :

a) $I = [-0,3; 0,3]$ b) $I = [100; 1\,000]$

5) Citer la propriété de la fonction carrée qui permet d'affirmer sans calcul que :

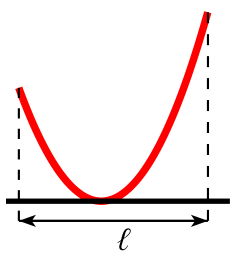
a) $5,15 \leqslant 5,825$ donc $5,15^2 \leqslant 5,825^2$

b) $-3,52 \leqslant -3,07$ donc $(-3,52)^2 \geqslant (-3,07)^2$

6) Soit f la fonction carrée. Si $x \in [1;3]$ à quel intervalle appartient $f(x)$. On pourra s'aider d'un tableau de variation.

7) La schématisation d'une sculpture construite à l'aide de la fonction carrée est haute de 5 m d'un côté et de 3 m de l'autre.

Calculer la valeur approchée au cm près de sa largeur ℓ.



EXERCICE 2

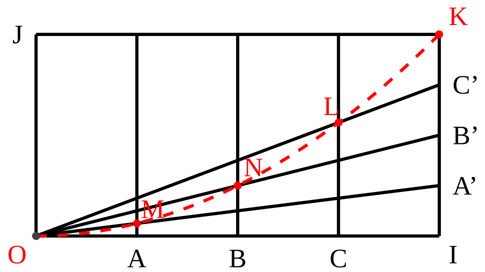
Construction d'une parabole

Voici un procédé utilisé par les tailleurs de pierres pour tracer une parabole sur un bloc rectangulaire.
Les points A, B, C du segment [OI] sont tels que :

$$OA = AB = BC = CI$$

Les points A', B', C' du segment [IK] sont tels que :

$$IA' = A'B' = B'C' = C'K$$



Justifier que les points O, M, N, L et K appartiennent à la courbe de la fonction carrée. (On pourra utiliser le théorème de Thalès)

EXERCICE 3

Forme canonique

Déterminer la forme canonique puis les variations des fonctions trinomes f suivantes :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$
2) $f(x) = x^2 + x - 6$
3) $f(x) = x^2 + 6x + 12$
4) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$
5) $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$
6) $f(x) = -x^2 + 7x - 10$

EXERCICE 4

Algorithme

Soit l'algorithme suivant :

Choisir un nombre.
Lui ajouter 3.
Elever le résultat au carré.
Multiplier le résultat par -2.
Soustraire au résultat 4.
Afficher le résultat

1) Traduire cet algorithme à l'aide d'une fonction où le nombre de départ est x
2) Proposer un programme sur votre caculatrice.
3) Comment traduire la fonction $f(x) = 2(x-5)^2 + 6$ à l'aide d'un algorithme ayant la même structure que celui ci-dessus.

EXERCICE 5

Symétrie

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2; 2]$.

2) Afficher à l'écran de votre calculatrice la fonction f sur l'intervalle $[-2;2]$. Conjecturer un élément de symétrie de cette courbe.

3) Démontrer cette conjecture.

Exercice 6

Variation d'une fonction trinôme

Dans chaque cas, dresser le tableau de variation des fonctions trinôme suivantes :

1) $f_1(x) = 3(x-1)^2 - 4$
2) $f_2(x) = 4 - 3(x-1)^2$
3) $f_3(x) = -2x^2 + 7$
4) $f_4(x) = -5 + 3x^2$

Exercice 7

Comparaison

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$

1) Dresser le tableau de variation de f
2) Sans calcul, comparer, si possible :

   a) $f(-1)$ et $f(2)$ b) $f(1)$ et $f(4)$ c) $f(20)$ et $f(19.7)$

3) a désigne un réel de l'intervalle $]-\infty;3]$. Comparer $f(a)$ et $f(a-1)$.

Exercice 8

Parabole

Dans chaque cas, dire si la parabole, représentant la fonction f, est tournée « vers le haut » ou « vers le bas ». Donner les coordonnées du sommet et tracer sur votre calculatrice la parabole en adaptant la fenêtre afin d'obtenir une représentation satisfaisante.

a) $f_1(x) = -(x+2)^2 - 3$

b) $f_2(x) = \dfrac{25}{2} + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$

c) $f_3(x) = -4(x-3,5)^2 + 1,5$

d) $f_4(x) = 7 + x^2$

Exercice 9

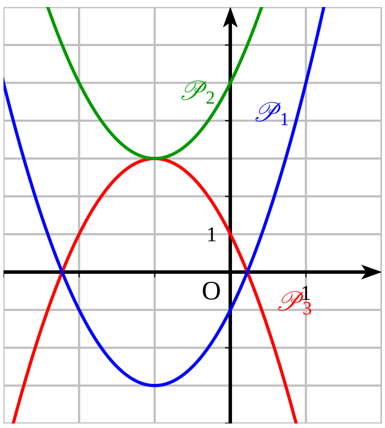
Fonctions et paraboles

Sans utiliser la caculatrice, associer à chacune des fonctions suivantes la représentation graphique qui lui correspond, en justifiant votre réponse.

$f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

$g(x) = 2(x+1)^2 - 3$

$h(x) = 2(x+1)^2 + 3$



EXERCICE 10

Déterminer un trinôme

f est un polynôme du second degré. $\mathscr{P}$ est la parabole représentant f dans un repère orthogonal.
Dans chacun des cas suivants, traiter les informations pour retrouver l'expression de $f(x)$.

a) $\mathscr{P}$ a pour sommet $S(2;3)$. Le point $A(0;-1)$ appartient à $\mathscr{P}$.

b) $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses aux points $A(-2;0)$ et $B(1;0)$, et l'axe des ordonnées au point $C(0;2)$.

c) $\mathscr{P}$ admet pour axe de symétrie la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $A(1;0)$. $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses en l'origine O du repère et passe par le point $A(3;1)$.

EXERCICE 11

Résistance

Sur une Peugeot 406 1,6i, les variations de la résistance R (en Ω) de la sonde de «température d'eau» en fonction de la température T (en $^\circ$C) du liquide dans le circuit de refroidissement sont données par :

$$R = 0,58T^2 - 116T + 6000 \quad (\text{avec } 0 \leqslant T \leqslant 150).$$

a) Vérifier que $R = 0,58(T-100)^2 + 200$.

b) Quel est le minimum de cette résistance ? A quelle température est-il atteint ?

EXERCICE 12

Démontrer

f est une fonction trinôme. On donne le tableau de variation suivant :

x	-3		1		5
$f(x)$		$\nearrow$	1,85	$\searrow$	$-2{,}15$

a) Que vaut $f(-3)$? Justifier

b) Donner l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 13

Balle de ping-pong

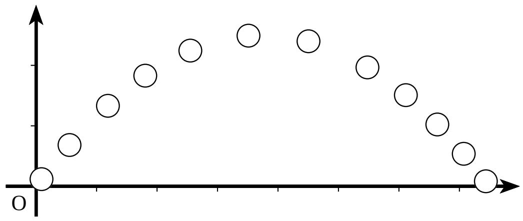
L'objectif de cet exercice est de trouver l'expression de la fonction f associée à la trajectoire de la balle de ping-pong.

a) • Partie de l'origine du repère, la balle arriverait 150 cm plus loin sans filet.

- Elle s'est élevée de 50 cm de haut.

  Traiter ces informations pour déterminer $f(x)$ sachant que f est une fonction polynôme de degré 2.

b) Sachant que le filet se trouve à 120 cm de l'origine et que la hauteur est 15,25 cm, la balle est-elle passée au-dessus du filet ?



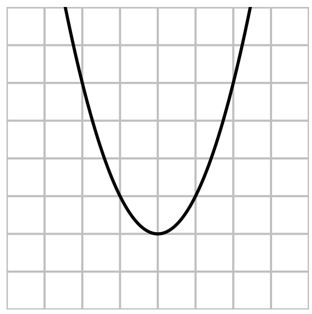
Exercice 14

Placer les axes

Marie a représenté ci-contre la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Marie a oublié de dessiner les axes du repère. Seriez vous capable de les replacer sur la figure ?



Exercice 15

Définition d'une parabole

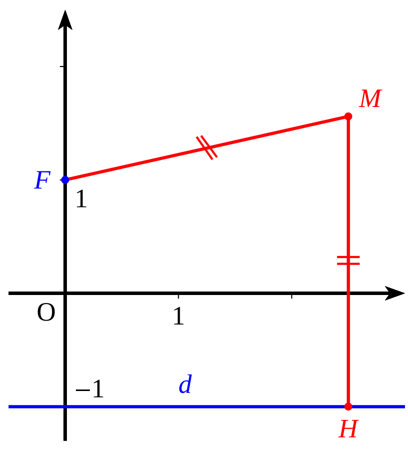
En géométrie, on appelle parabole une courbe constituée des point M équidistants d'un point F appelé foyer et d'une droite fixe.

On donne le foyer de la parabole $F(0;1)$ et la droite d fixe d'équation $y = -1$. H est le projeté orthogonal de M sur la droite d. On obtient alors la figure ci-contre :
Comme les point M sont équidistants de F et de la droite d, on peut écrire :

$$MF = MH$$

a) Pourquoi M est sur la médiatrice de $[FH]$?

b) Si H est un point de d, indiquer une construction du point M associé à H.



EXERCICE 16

Fonction inverse

1) f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels suivants :

a) $\dfrac{5}{7}$ c) $-\dfrac{3}{4}$ e) 10^{-6}

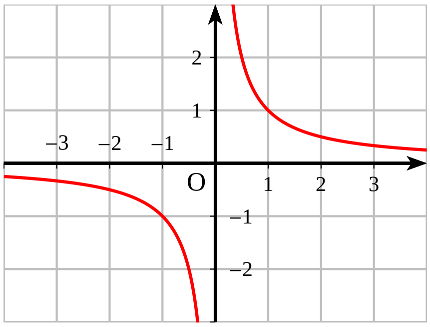
b) $-\dfrac{1}{9}$ d) $\dfrac{5}{8}$ f) 10^{5}

2) Voici la courbe représentative de la fonction inverse, dans un repère. Expliquer graphiquement

a) Pourquoi il n'existe qu'un seul réel dont l'inverse est 2. Quel est ce réel ?

b) Pourquoi il n'existe qu'un réel dont l'inverse est -3. Quel est ce réel ?

c) Pourquoi il n'existe pas de réel dont l'inverse est 0 ?



3) f est la fonction inverse. Déterminer les antécédents par f de :

a) $\dfrac{4}{3}$ b) $0,02$ c) 10^{-5} d) 2×10^{4}

Que fait-on comme fonction pour trouver ces antécédents ?

4) Afficher sur l'écran de votre calculatrice, la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle I indiqué, en précisant la fenêtre utilisée.

a) $I = [-1 ; -0,1]$ b) $I = [10, 100]$

5) Citer la propriété de la fonction inverse qui permet d'affirmer sans calcul que :

a) $3,14 \leqslant 3,151$ donc $\dfrac{1}{3,14} \geqslant \dfrac{1}{3,151}$

b) $-0,2 \leqslant -0,152$ donc $-\dfrac{1}{0,2} \geqslant -\dfrac{1}{0,152}$

6) Résoudre les inéquations suivantes en s'aidant de la courbe de la fonction inverse

a) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$ b) $\dfrac{1}{x} \leqslant -3$ c) $\dfrac{1}{x} > -2$

7) A l'intérieur d'un piston, la pression P en bars, et le volume V en litres, suivent la loi $P \times V = 1$.

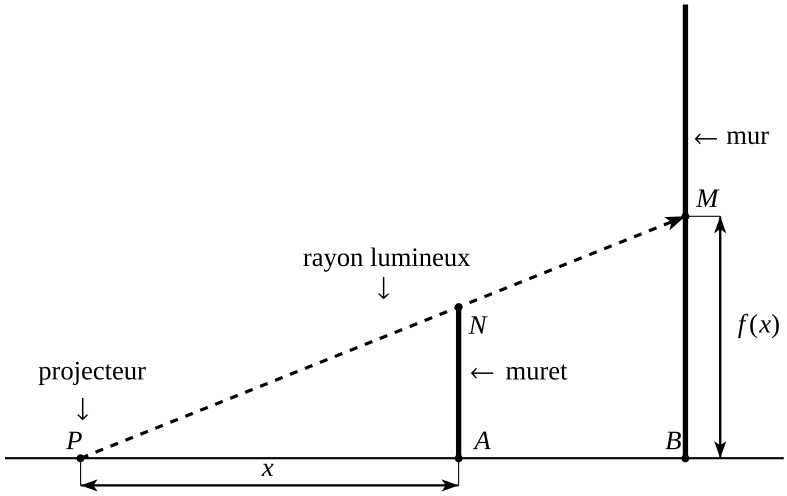
a) Expliquer pourquoi cette loi est liée à la fonction inverse.

b) Sachant qu'à l'intérieur du piston, le volume peut varier entre 0,5 et 5 litres, quelles sont les valeurs possibles pour la pression ?

EXERCICE 17

Un petit muret

Un petit muret AN de 2 mètres de hauteur est situé à 3 mètres d'un mur BM.
Au sol un projecteur mobile est dirigé sur ce muret et le mur derrière ; l'ombre du muret arrive en M sur le mur.



1) Montrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $BM = 2 + \dfrac{6}{AP}$

2) Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x}$.

   a) Déterminer les variations de f sur $]0; +\infty[$ puis dresser son tableau de variation.

   b) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	6	15
$f(x)$						

   c) Représenter la fonction f pour les valeurs de x situées dans l'intervalle $]0; 15]$. On prendra comme unité le cm sur les deux axes.

3) On cherche où situer le projecteur afin qu'une marque située à 3,5 m de hauteur sur le mur ne soit jamais éclairée. Quelles sont les valeurs de x possibles ?

EXERCICE 18

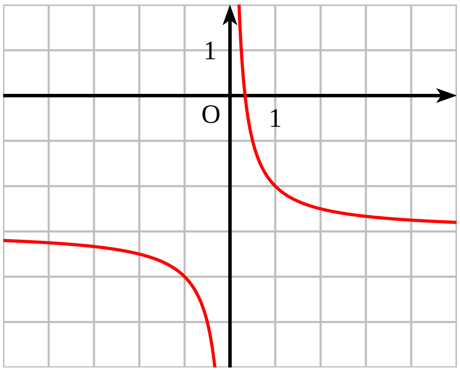
Fonctions homographiques et hyperboles

Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

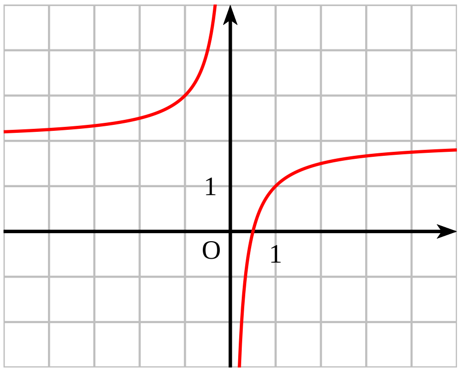
- $f_1(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$
- $f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$
- $f_3(x) = -3 + \dfrac{1}{x}$
- $f_4(x) = -3 - \dfrac{1}{x}$

Associer chaque fonction à son graphique en justifiant sa réponse.

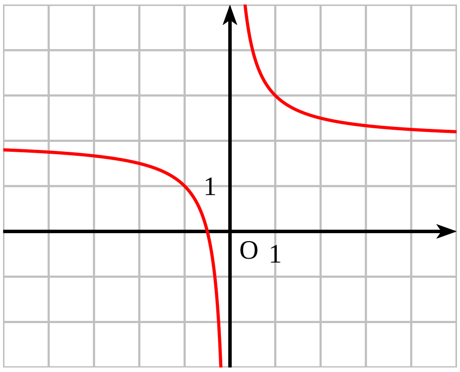
Graphique A



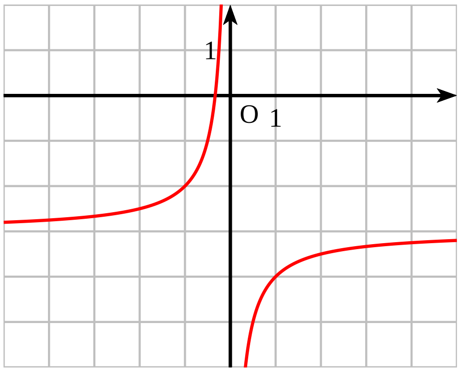
Graphique C



Graphique B



Graphique D



Algorithme

Exercice 19

Donner l'écriture de la fonction correspondante aux opérations suivantes

1) On prend l'inverse de la somme de x et de 2.
2) On ajoute 3 à l'inverse de x.
3) On ajoute 1 à l'inverse de la différence de x et de 5.

Exercice 20

Déterminer la fonction f associée aux programmes suivants :

Variables
X
Initialisation
Lire X
Traitement
$X - 3 \rightarrow X$
$4X \rightarrow X$
$\dfrac{1}{X} \rightarrow X$
Sortie
Afficher X

Variables
X
Initialisation
Lire X
Traitement
$5X \rightarrow X$
$\dfrac{1}{X} \rightarrow X$
$X + 5 \rightarrow X$
Sortie
Afficher X

Exercice 21

Pour chaque fonction donnée ci-desous, donner un programme similaire aux programme de l'exercice précédent.

$f(x) = \dfrac{8}{x+3}$ $\qquad\qquad$ $g(x) = 3 + \dfrac{1}{7x+1}$

Exercice 22

x est un nombre de l'intervalle $[-3; -1]$

1) Compléter les programmes de calculs suivants en précisant à chaque étapes l'opération qui est faite.

$$x \xrightarrow[\dots]{} \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{on multiplie par 3}]{} \dots \xrightarrow[\dots]{} 5 + \frac{3}{x}$$

$$x \xrightarrow[\text{on multiplie par 2}]{} \dots \xrightarrow[\dots]{} 2x+1 \xrightarrow[\text{on prend l'inverse}]{} \dots$$

2) Utiliser ces programmes de calcul pour donner un encadrement des nombre :

$A = 5 + \dfrac{3}{x}$ $\qquad$ et $\qquad$ $B = \dfrac{1}{2x+1}$

Exercice 23

x est un nombre de l'intervalle $[5; 10]$

Procéder comme l'exercice précédent pour donner un encadrement des nombres :

$M = \dfrac{5}{x-3}$ $\qquad$ et $\qquad$ $N = 2 - \dfrac{7}{x}$

Exercice 24

Campagne de publicité

Partie A

Un entreprise souhaite promouvoir une nouvelle sorte de céréales pour le petit-déjeuner. L'entreprise estime qu'aparès x semaines de publicité, le pourcentage de personnes connaissant le nom de ces céréales est donné par :

$$p(x) = \frac{80x}{x+1}$$

1) Calculer $p(4)$. En déduire le pourcentage de personnes ignorant le nom du produit après quatre semaines de publicité.
2) L'écriture de $p(x)$ est-elle compatible avec les affirmations suivantes :
   a) Avant la campagne de publicité, personne ne connaissait le nom de ces céréales.
   b) Après 15 semaines de publicité, tout le monde connaît le nom de ces céréales.

Partie B

L'entreprise envisage une campagne de publicité de 10 semaines pour promouvoir ce produit.

On s'intéresse donc à la fonction p définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$p(x) = \frac{80x}{x+1}$$

Tracer la fonction p sur votre calculette. Vous prendrez comme fenêtre graphique :

$$0 \leqslant X \leqslant 10 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant Y \leqslant 90 \quad \text{unité graphique : 1 pour } X \text{ et 10 pour } Y$$

Utiliser votre calculatrice pour répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer graphiquement la durée nécessaire pour que le pourcentage $p(x)$ devienne supérieur ou égal à 60%.
2) Déterminer graphiquement combien de semaines supplémentaires de publicité sont nécessaires pour que ce pourcentage dépasse 70%.
3) Le directeur de marketing de cette entreprise affirme que la campagne de publicité aura un fort impact pendant les trois premières semaines, et qu'au-delà, ce sera beaucoup plus limité.
   Au vu du graphique, cette affirmation vous semble-t-elle justifiée ?

Exercice 25

Algorithme de Kuwarizmi

On donne l'algorithme suivant en pseudo-code

```
Variables
A, B, Q, X
Initialisation
Lire A, B
Traitement
A/2 → Q
Q² → X            valeur X1
X + B → X         valeur X2
√X → X            valeur X3
X − Q → X         valeur X4
Sortie
Afficher X
```

1) Remplir le tableau suivant :

A	B	Q	X_1	X_2	X_3	X_4	Résultat
10	96						
8	2 009						

2) Rentrer cet algorithme dans votre calculette et retrouver les résultats du tableau.

3) Résoudre en utlisant la forme canonique les équations suivantes :
   a) $x^2 + 10x = 96$
   b) $x^2 + 8x = 2\,009$
   c) Expliquer ce que calcule cet algorithme
   d) Trouver alors, à l'aide du programme de votre calculatrice, la solution positive de l'équation : $x^2 - 84x = 3565$