

L'outil vectoriel et géométrie ANALYTIQUE

Table des matières

1	Définition et théorème	2
1.1	Définition	2
1.2	Egalité entre deux vecteurs	3
2	Addition de deux vecteurs	3
2.1	La relation de Chasles	3
2.2	Somme de deux vecteurs de même origine	4
2.3	Propriétés de l'addition de deux vecteurs	5
2.4	Exemples d'application	6
3	Multiplication d'un vecteur par un scalaire	7
3.1	Définition	8
3.2	Exercices d'application	8
3.2.1	Exercice 1	8
3.2.2	Exercice 2	9
3.2.3	Exercice 3	10
3.3	Propriétés de la multiplication par un scalaire	11
3.4	Exercice d'application	11
4	Colinéarité de deux vecteurs	12
4.1	Définition	12
4.2	Théorèmes	12
4.3	Exercices d'application	13
4.3.1	Exercice 1 : parallélisme	13
4.3.2	Exercice 2 : l'alignement	13
4.3.3	Exercice 3	14
5	Géométrie analytique	16
5.1	Repère	16
5.1.1	Repère quelconque	16
5.1.2	Repère orthogonal et repère orthonormal	17
5.1.3	Exercices sur un repère quelconque	18
5.2	Coordonnées de vecteurs	18
5.3	Calculs en géométrie analytique	20
5.4	Colinéarité en géométrie analytique	23
5.5	Exercices d'application	24
5.5.1	Exercice 1	24
5.5.2	Exercice 2	25
5.5.3	Exercice 3	26
5.5.4	Exercice 4	27

1 Définition et théorème

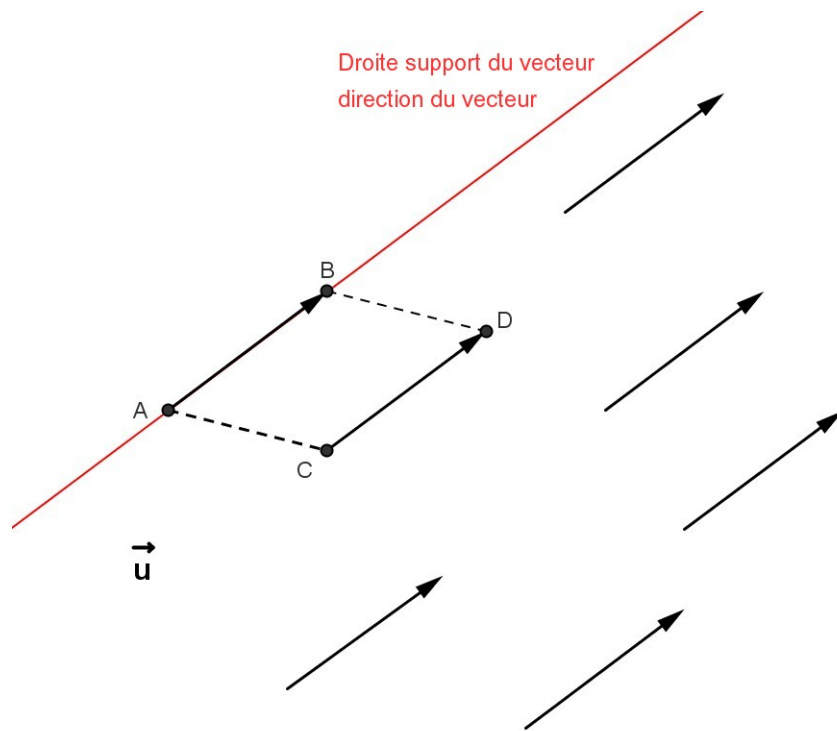
1.1 Définition

Définition 1 : Un vecteur $\vec{u}$ est un objet mathématique qui se définit par :

- ⇒ Une direction (pente d'une droite, mais pas une orientation)
- ⇒ Un sens (orientation : la flèche)
- ⇒ Une norme : longueur du vecteur notée : $||\vec{u}||$

Remarque :

- ⇒ Il faut faire la différence entre la direction et le sens du vecteur car dans le langage courant les deux mots sont synonyme.
- ⇒ Un vecteur n'a pas de point d'application. On peut donc le placer où l'on veut dans le plan euclidien. En cela il se différencie de la force en physique qui elle a un point d'application. Cependant, il y a bien un rapport très étroit entre la symbolisation d'une force en physique et le vecteur en mathématique.



- ⇒ Ces « segments munis d'une flèche » représentent le même vecteur $\vec{u}$. On dit que le vecteur $\vec{u}$ est la classe d'équivalence de toutes ces représentations.
- ⇒ Pour fixer un représentant particulier du vecteur $\vec{u}$, on peut prendre deux points A et B du plan. On note alors ce représentant : $\overrightarrow{AB}$.
- ⇒ Par abus de langage, on confond le représentant $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\vec{u}$. On a alors : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. On peut donc noter un vecteur avec une seule lettre (minuscule) ou avec deux lettres (majuscule car point).

i La flèche sur les points A et B est indispensable car, sans flèche, il s'agit de la distance entre les points A et B qui n'est autre que la norme du vecteur.

$$||\overrightarrow{AB}|| = AB$$

1.2 Egalité entre deux vecteurs

Théorème 1 : Deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont égaux, si, et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme}$$

Démonstration : Un vecteur contient deux informations : une longueur et une direction. Si deux vecteurs sont égaux, alors le quadrilatère $ABDC$ possède deux côtés de même longueur et parallèle, ce qui est la définition d'un parallélogramme.

Remarque : On peut donc associer un parallélogramme à l'égalité de deux vecteurs, ce qui simplifie la démonstration pour prouver qu'un quadrilatère est en parallélogramme.

2 Addition de deux vecteurs

Note : Le but avec un nouvel outil mathématique est de pouvoir manier facilement celui-ci. D'où l'idée de créer des opérations avec les vecteurs. L'addition de deux vecteurs reprend l'idée en physique de la résultante de deux forces de direction différentes. Cette opération est connue sous le nom de « relation de Chasles » (mathématicien du XIX^e siècle).

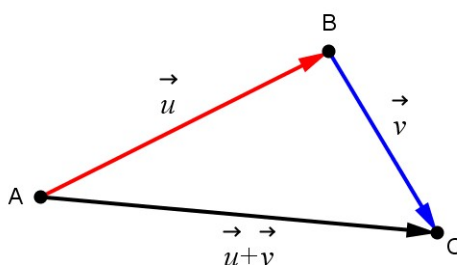
2.1 La relation de Chasles

Propriété 1 : Relation de Chasles

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont les représentants sont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, on définit l'addition des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la relation :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{d'où} \quad \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$

On a alors le schéma suivant :



i Cette opération est toujours possible, car l'on peut toujours déplacer le deuxième vecteur $\vec{v}$ pour qu'il commence à la fin du premier $\vec{u}$.

Cette addition de deux vecteurs ne s'applique pas à la norme, en effet :

$$||\vec{u} + \vec{v}|| \neq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \quad \text{mais} \quad ||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$$

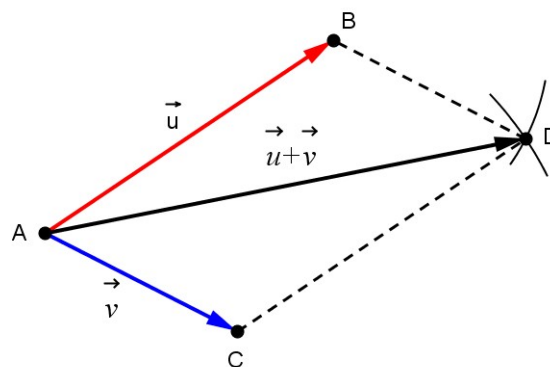
Remarque : Cette opération est très efficace en géométrie, car l'on peut décomposer un vecteur quelconque en deux vecteurs plus intéressant. Par exemple, on peut écrire quelque soit les points E, F et G :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}$$

La seule contrainte est donc de commencer le deuxième vecteur par la fin du premier.

2.2 Somme de deux vecteurs de même origine

Cette configuration se produit lorsqu'on cherche à trouver la résultante de deux forces. L'idée pour additionner deux vecteurs de même origine est la configuration du parallélogramme. On a :



Démonstration : Si $ABDC$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, on a donc :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

2.3 Propriétés de l'addition de deux vecteurs

Propriété 2 : Propriétés de l'addition de deux vecteurs.

On retrouve les mêmes propriétés dans l'addition de deux vecteurs que dans l'addition de deux nombres.

1) L'addition de deux vecteurs est commutative :

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

2) L'addition de trois vecteurs est associative :

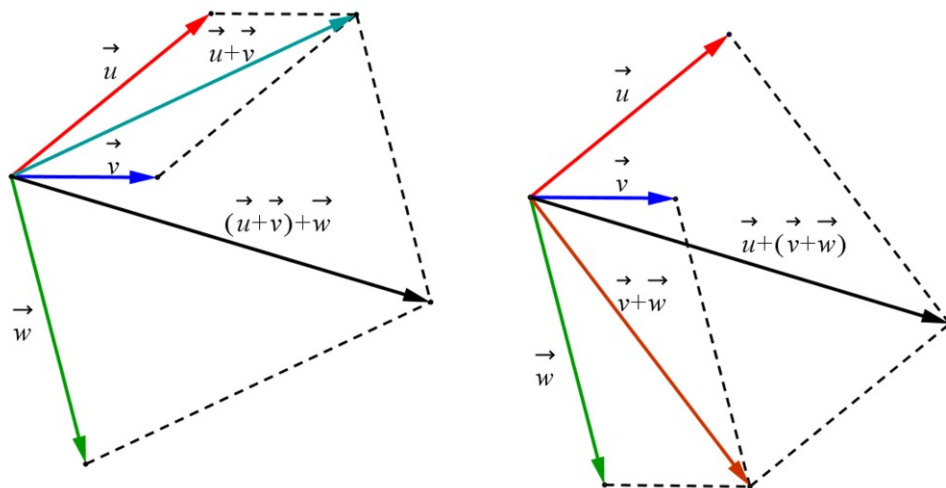
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

3) L'addition de deux vecteurs possède un élément neutre : $\vec{0}$

4) Tout vecteur $\vec{u}$ possède un opposé, noté $-\vec{u}$

Remarque :

- ⇨ La première propriété permet de changer l'ordre dans lequel on effectue l'addition.
- ⇨ La deuxième propriété signifie que lorsque l'on cherche à additionner deux vecteurs, on peut d'abord additionner les deux premiers, puis additionner ce résultat au troisième ou additionner les deux derniers puis additionner ce résultat au premier. Voici un exemple de cette propriété :



- ⇨ Le vecteur nul vient du fait que si l'on applique la relation de Chasles à :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$$

On décide alors d'appeler un vecteur de longueur nulle par le vecteur nul noté : $\vec{0}$.

- ⇨ la dernière propriété vient de $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, on décide de noter :

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

Donc quand on inverse les lettres d'un vecteur on change de signe.

2.4 Exemples d'application

1) Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.

$$a) \vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$$

$$b) \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$$

$$c) \vec{w} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB}$$

2) Démontrer que pour tous points A, A, B et C :

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

3) $ABCD$ est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$



1) a) On applique la relation de Chasles avec les deux premiers vecteurs puis avec le résultat et le dernier vecteur.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AA} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

b) On enlève les signes $-$ en inversant les lettres du vecteur, puis on change l'ordre des vecteurs pour pouvoir utiliser la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\ &= \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

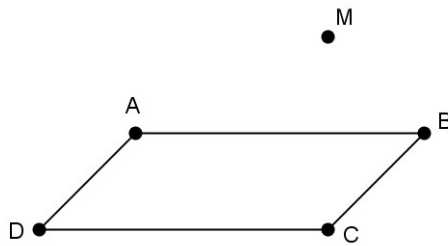
c) Même procédé, puis on regroupe les vecteurs identiques

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BA} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \\ &= 2\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

2) On part du terme de gauche pour arriver au terme de droite.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

3) On peut faire un figure :



On part du terme de gauche, pour arriver au terme de droite :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} \\ &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}\end{aligned}$$

Comme ABCD est un parallélogramme : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{BB} \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

3 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Note : Le terme « scalaire » est employé pour désigner un nombre par opposition au mot vecteur.

3.1 Définition

Définition 2 : Soit un vecteur $\vec{u}$ et un réel k .

On définit le produit $k\vec{u}$ du scalaire k par le vecteur $\vec{u}$ par :

⇔ Si $k > 0$ $k\vec{u}$ a la même direction et même sens que $\vec{u}$ et sa longueur est multiplier par k . On a alors :

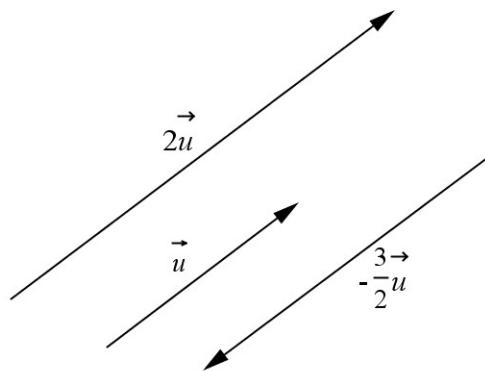
$$||k\vec{u}|| = k ||\vec{u}||$$

⇔ Si $k < 0$ $k\vec{u}$ a la même direction et un sens contraire à $\vec{u}$ et sa longueur est multiplier par $-k$. On a alors :

$$||k\vec{u}|| = -k ||\vec{u}||$$

⇔ Si $k = 0$ on a alors : $0\vec{u} = \vec{0}$

On a ainsi les vecteurs suivants :

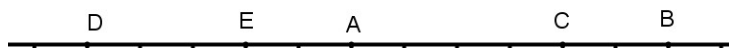


 Quand k esyt positif, il ne joue que sur la longueur du vecteur. Quand k est négatif, il joue sur la longueur et sur le sens.

3.2 Exercices d'application

3.2.1 Exercice 1

Les point A, B, C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$



1) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont de sens contraire. Donc $k < 0$. Comme $AB = 6$ et $AE = 2$, on a : $k = -3$.

$$\vec{v} = -3\vec{u}$$

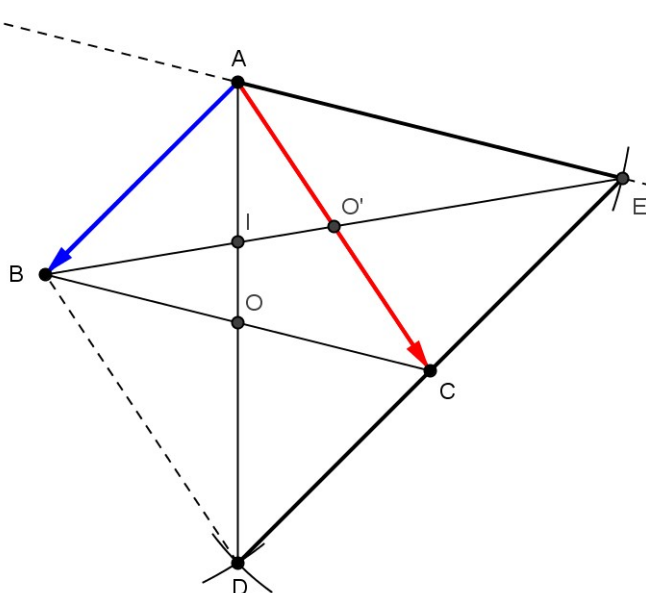
3.2.3 Exercice 3

ABC est un triangle.

- 1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
Prouver que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu.
- 2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
Prouver que C est le milieu de $[ED]$.
- 3) Les droites (AD) et (BE) se coupent en I . Que représente I pour le triangle ABC ?
Prouver que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.



- 1) On a figure suivante :



Pour déterminer le point D , comme $\overrightarrow{AD}$ est la somme de deux vecteurs de même origine, on trace le parallélogramme $ABDC$.

Comme $ABDC$ est un parallélogramme, les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu O .

- 2) Pour construire le point C , on trace la parallèle à (BC) passant par A . On reporte la longueur BC .

Comme $ABDC$ est un parallélogramme, on a : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BA}$

Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, alors $ABCE$ est un parallélogramme. On a alors :
 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$

Conclusion : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}$, C est donc le milieu de $[ED]$.

- 3) On sait que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu O . Donc $(AO) = (AD)$ est la médiane issue de A dans le triangle ABC .

On sait de plus que $ABCE$ est un parallélogramme, donc les segments $[AC]$ et $[BE]$ ont même milieu O' . Donc (BO') est la médiane issue de B dans le triangle ABC . Comme $(BO') = (BE)$, (BE) est la médiane issue de B dans le triangle ABC .

Comme I est l'intersection de deux médianes du triangle ABC , I est le centre de gravité du triangle ABC .

Des propriétés du centre de gravité, on en déduit alors que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BO'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BE}$$

3.3 Propriétés de la multiplication par un scalaire

Propriété 3 : La multiplication d'un vecteur par un scalaire, obéit à la bilinéarité, c'est à dire :

$$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$$

$$(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$$

Remarque : Ces deux propriétés permet de développer des expressions vectorielles comme des équations numériques. Elles permettent donc de résoudre des équations vectorielles, c'est à dire permet à la géométrie d'avoir accès à la performance de l'algèbre.

3.4 Exercice d'application

Note : Le but de cet exercice est de placer un point à l'aide d'une relation vectorielle

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm. Placer les points M et N définis par les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \vec{0}$$



Pour placer les points M et N , il faut exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ici, on a privilégié le point A , on aurait pu le faire avec le point B .

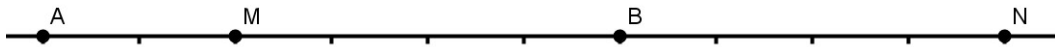
Pour le point M

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) &= \vec{0} \quad \text{relation de Chasles} \\ 3\overrightarrow{AM} &= -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Pour le point N

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} &= \overrightarrow{0} \\
 2\overrightarrow{NA} - 5(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \quad \text{relation de Chasles} \\
 2\overrightarrow{AN} - 5\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{AB} &= -\overrightarrow{BA} \\
 -3\overrightarrow{NA} &= 5\overrightarrow{AB} \\
 3\overrightarrow{AN} &= 5\overrightarrow{AB} \\
 \overrightarrow{AN} &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

On obtient alors la figure suivante :



4 Colinéarité de deux vecteurs

Note : On ne parle pas de parallélisme pour des vecteurs car ils n'ont pas de point d'application mais de colinéarité.

4.1 Définition

Définition 3 : On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = k\vec{u}$$

Remarque : Cela découle directement de la définition du produit d'un vecteur par un scalaire.

4.2 Théorèmes

Théorème 2 : Parallélisme et alignement

⇔ Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires c'est à dire que :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$$

⇔ Les points A, B et C sont alignés si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire que :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$$

Remarque : Ces deux théorèmes sont très importants car ils permettent de relier le parallélisme et l'alignement à l'aidé de vecteurs.

4.3 Exercices d'application

4.3.1 Exercice 1 : parallélisme

ABC est un triangle et P le point défini par :

$$5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$$

Montrer que $ABPC$ est un trapèze.

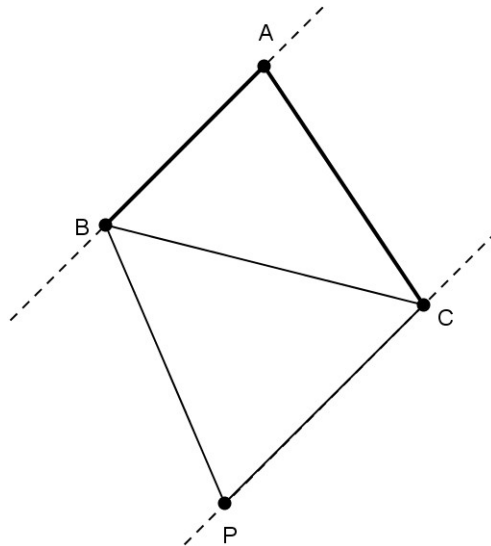


Pour montrer que $ABPC$ est un trapèze, il faut montrer que les droites (CP) et (AB) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

or on sait que : $5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned} 5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{0} \\ 4\overrightarrow{PC} &= -5\overrightarrow{AB} \\ -4\overrightarrow{CP} &= -5\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CP} &= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (CP) et (AB) sont parallèles et donc $ABPC$ est un trapèze.



4.3.2 Exercice 2 : l'alignement

ABC est un triangle. M et N sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$$

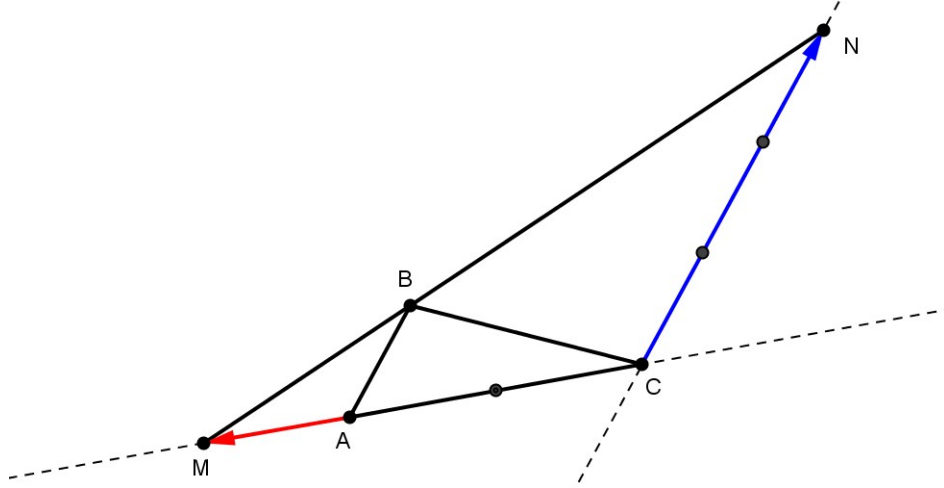
- 1) Placer les point M et N .
- 2) Montrer que les points B , M et N sont alignés.



1) Pour placer les point M et N , on utilise :

$$\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$$

On obtient alors :



2) Pour montrer que les points B , M et N sont alignés, il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires. Pour cela, on exprime ces deux vecteurs à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a alors :

Pour l'autre vecteur

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$$

$$\text{or on sait que } \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$-2\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$$

$$\text{or on sait que } \overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

On obtient alors la relation : $\overrightarrow{BN} = -2\overrightarrow{BM}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et donc les points M , B et N sont alignés.

4.3.3 Exercice 3

ABC est un triangle et I est le milieu de $[AB]$.

1) a) Construire le point J tel que : $\overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire que $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

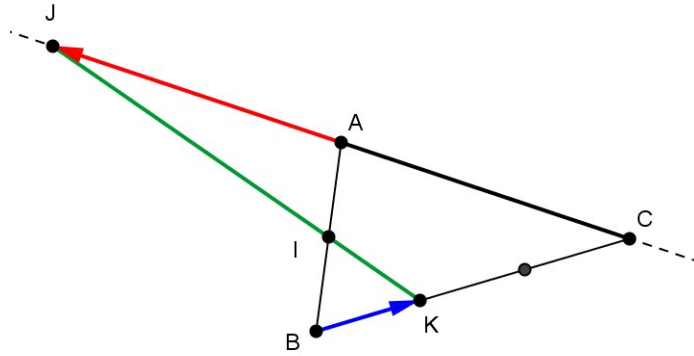
2) On note K le point tel que : $2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{BK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. Placer K .

b) En déduire que $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Quelle relation lie $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$? Que peut-on conclure?



1) a) On a la figure suivante :



b) On sait que I est le milieu de $[AB]$, donc on a : $\overrightarrow{IA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. On a alors :

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

2) a) On a la relation :

$$2\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$$

on introduit le point B dans $\overrightarrow{KC}$

$$2\overrightarrow{KB} + (\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{0}$$

$$3\overrightarrow{KB} = -\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{KB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

On place alors le point K .

b) Expression de $\overrightarrow{IK}$:

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

En introduisant A dans $\overrightarrow{BC}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

On a donc : $-3\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Conclusion : on a : $\overrightarrow{IJ} = -3\overrightarrow{IK}$. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires et donc les points J, I et K sont alignés.

5 Géométrie analytique

Note : Le but de la géométrie analytique est de résoudre numériquement un problème de géométrie. Cela suppose la notion de coordonnées et de repère. Le progrès qu'a apporté la géométrie analytique est énorme car il a permis de faire un « pont » entre l'algèbre et la géométrie qui jusque là étaient deux disciplines bien séparées.

Depuis l'apparition de l'ordinateur, la géométrie analytique devient indispensable pour visualiser des figures géométriques.

5.1 Repère

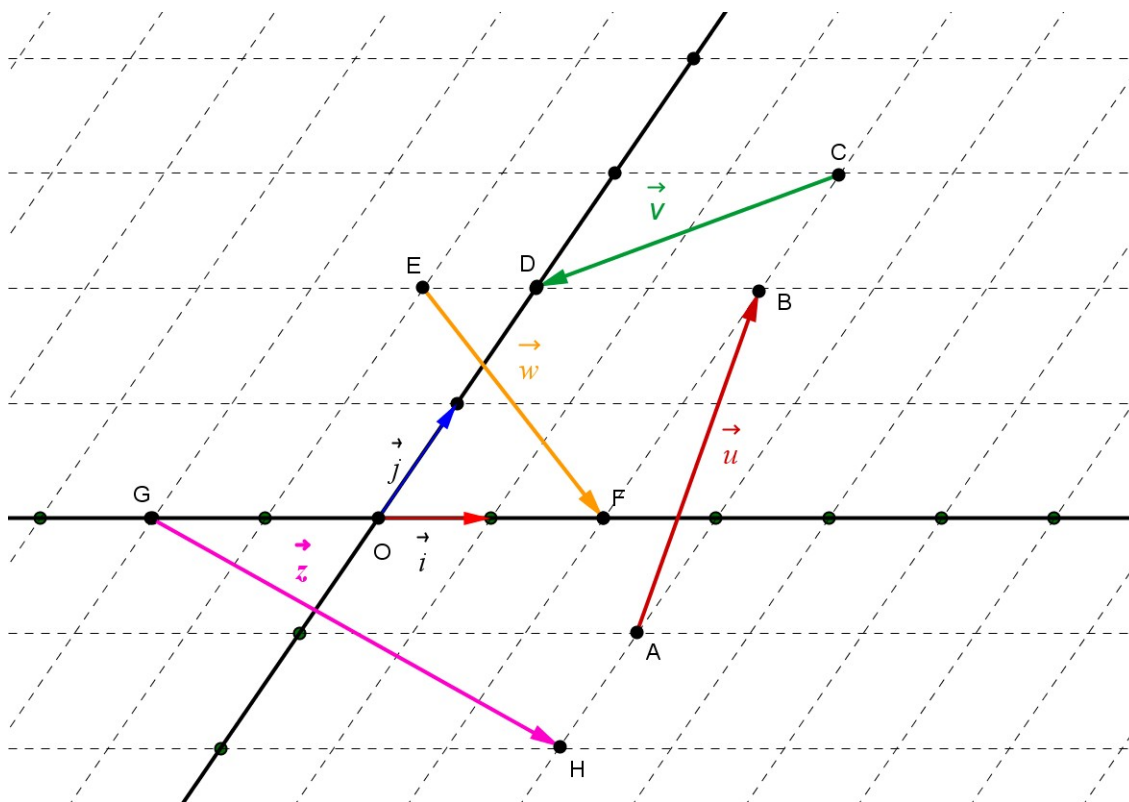
Pour définir un repère dans le plan, il est nécessaire d'avoir :

- ⇨ un point origine : O .
- ⇨ 2 vecteurs non colinéaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Le couple $(\vec{i}, \vec{j})$ est une « base » du plan, c'est à dire que ce couple peut engendrer tous les vecteurs du plan.

L'ensemble $(O; \vec{i}; \vec{j})$ définit un repère du plan.

5.1.1 Repère quelconque

Les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ne sont pas nécessairement orthogonaux ni de même longueur. On obtient ainsi le repère :



On peut alors lire les coordonnées des points de A à H .

$A(3; -1)$, $B(2; 2)$, $C(2; 3)$, $D(0; 2)$, $E(-1; 2)$, $F(2; 0)$, $G(-2; 0)$, $H(3; -2)$

Si on considère un point M de coordonnées $(x; y)$ quelconque, on a alors à l'aide des vecteurs de base $\vec{i}$ et $\vec{j}$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

On écrira alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}(x; y)$

De même les on peut lire les coordonnées des vecteurs de $\vec{u}$ à $\vec{z}$

$$\vec{u}(-1; 3), \quad \vec{v}(-2; -1), \quad \vec{w}(3; -2), \quad \vec{z}(5; -2)$$

On peut alors traduire les vecteurs de $\vec{u}$ à $\vec{z}$

$$\vec{u} = -\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{v} = -2\vec{i} - \vec{j}, \quad \vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{z} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$$

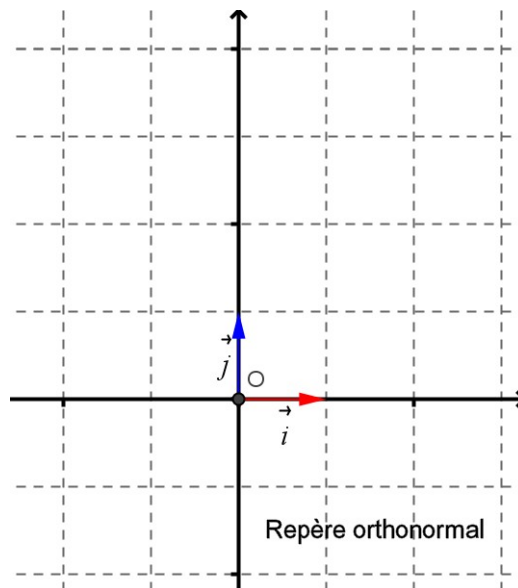
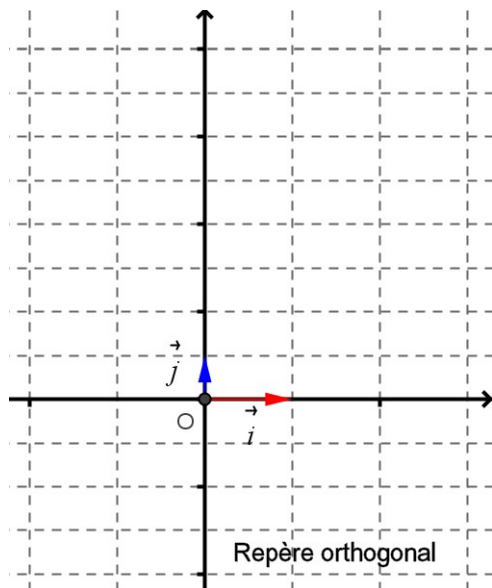
5.1.2 Repère orthogonal et repère orthonormal

Dans un **repère orthogonal**, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires mais la longueur des vecteurs de base ne sont pas égale.

Dans un **repère orthonormal**, les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont perpendiculaires et sont de même longueur. On pose alors :

$$|\vec{i}| = 1 \quad \text{et} \quad |\vec{j}| = 1$$

On obtient alors les deux repères :



Note : On peut écrire les coordonnées $(x; y)$ d'un point M ou de vecteur $\overrightarrow{OM}$ de plusieurs façons :

Notation matrice ligne : $M(x; y)$ et $\overrightarrow{OM}(x; y)$

Notation matrice colonne : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

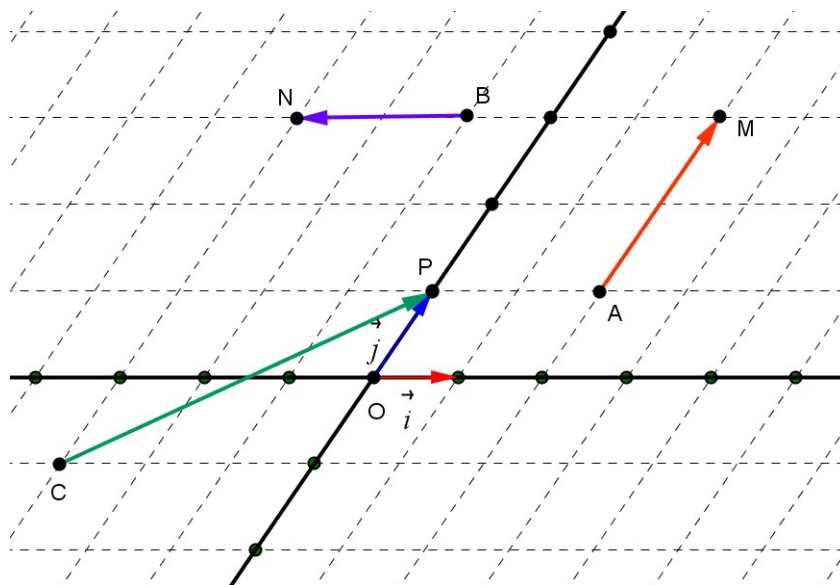
5.1.3 Exercices sur un repère quelconque

Placer les points A, B, C, M, N et P dans un repère quelconque tels que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= 2\vec{i} + \vec{j}, & \overrightarrow{OB} &= -1\vec{i} + 3\vec{j}, & \overrightarrow{OC} &= -3\vec{i} - \vec{j} \\ \overrightarrow{AM} &= 0\vec{i} + 2\vec{j}, & \overrightarrow{BN} &= -2\vec{i} + 0\vec{j}, & \overrightarrow{CP} &= 3\vec{i} + 2\vec{j}\end{aligned}$$



On reprend le repère quelconque du (5.1.1). On a alors :



5.2 Coordonnées de vecteurs

Théorème 3 : Soit deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$. On a alors les relations suivantes :

1) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$(x_B - x_A; y_B - y_A)$$

2) Les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont :

$$\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2} \right)$$

3) Dans un repère orthonormal, la longueur AB est égale à :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Exemple : Le plan est muni d'un repère orthonormal. Dans chacun des cas suivants, déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$, du milieu I de $[AB]$ et la distance AB .

1) $A(1; -5)$ et $B(3; -9)$

2) $A(-3; \sqrt{2})$ et $B(2; -\sqrt{2})$

3) $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$ et $B\left(\frac{1}{3}; -5\right)$



1) On a en appliquant les formules :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{3+1}{2} \\ \frac{-9-5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5}$$

2) On a en appliquant les formules :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(-3) \\ -\sqrt{2}-\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{2-3}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{5^2 + (-2\sqrt{2})^2} = \sqrt{25+8} = \sqrt{33}$$

3) On a en appliquant les formules :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}-\frac{1}{2} \\ -5-\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ -\frac{23}{4} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-5\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} \\ -\frac{17}{8} \end{pmatrix}$$

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{23}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{529}{16}} = \frac{\sqrt{4765}}{12}$$

5.3 Calculs en géométrie analytique

Théorème 4 : Soit deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$

- 1) $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
- 2) Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont : $(x + x'; y + y')$
- 3) Les coordonnées de $k\vec{u}$, avec $k \in \mathbb{R}$ sont : $(kx; ky)$

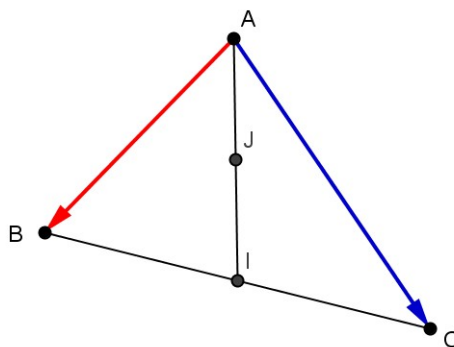
Exemple : ABC est un triangle, I est le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AI]$.
On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

- 1) Calculer les coordonnées de I et J .
- 2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$$



- 1) Faisons une figure et déterminons les coordonnées de I et J .



On a donc dans ce repère : $A(0;0)$, $B(1;0)$ et $C(0;1)$. On obtient alors :

$$I = \begin{pmatrix} \frac{0+1}{2} \\ \frac{1+0}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

2) On calcule le vecteur $\vec{u}$ à l'aide de la notation matricielle :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 1 - \frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

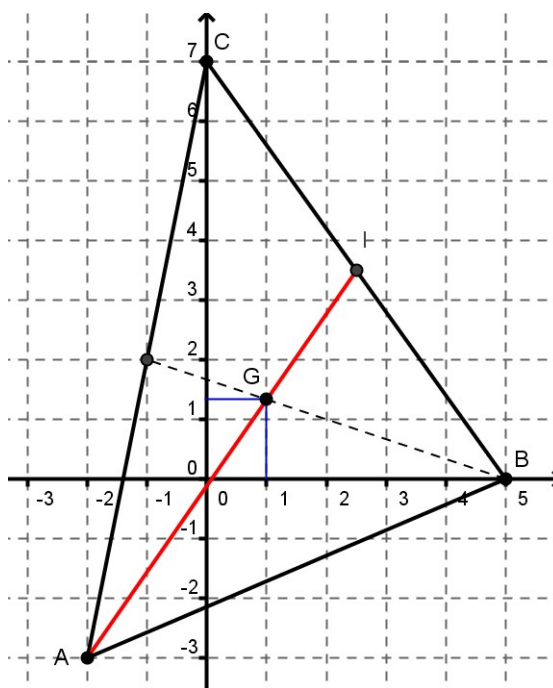
Autre exemple dans un repère orthonormal

Les points A , B et C sont tels que : $A(-2; -3)$, $B(5; 0)$ et $C(0; 7)$. G est le centre de gravité du triangle ABC .

- 1) a) Calculer les coordonnées du milieu I de $[BC]$.
 b) Quel est le nombre k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$?
 c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$. En déduire celles de $\overrightarrow{AG}$ puis celles de G .
- 2) Prouver que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$



- 1) a) Faisons d'abord une figure :



On trouve alors les coordonnées de I :

$$I = \begin{pmatrix} \frac{5+0}{2} \\ \frac{0+7}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

b) D'après les propriétés du centre de gravité on a : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

c) Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$, $\overrightarrow{AG}$ puis de G .

$$\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} + 2 \\ \frac{7}{2} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{13}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix}$$

Si on appelle $(x; y)$ les coordonnées de G , on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x - (-2) = 3 \\ y - (-3) = \frac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

2) En utilisant un calcul matriciel, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} &= \begin{pmatrix} -2-1 \\ -3-\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0-1 \\ 7-\frac{4}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{13}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3+4-1 \\ -\frac{13}{3}-\frac{4}{3}+\frac{17}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ correspond à la définition vectorielle du centre de gravité d'un triangle. On retrouvera cette égalité en première lors du chapitre sur le barycentre.

5.4 Colinéarité en géométrie analytique

Définition 4 : On appelle déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ le nombre noté $\det(\vec{u}, \vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

On effectue le produit de la 1^{re} diagonale moins le produit de la 2^e

Exemple : On donne $\vec{u}(3; 5)$ et $\vec{v}(-2; 1)$. Calculer le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 5 = 3 + 10 = 13$$

Théorème 5 : Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \text{ou} \quad xy' - x'y = 0$$

Exemple : Dans chacun des deux cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire :

- 1) $\vec{u}(10; 5)$ et $\vec{v}(-4; 2)$
- 2) $\vec{u}(3; -2)$ et $\vec{v}(6; -1)$



- 1) Calculons le déterminant des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 10 \times 2 - (-4) \times (-5) = 20 - 20 = 0$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs sont colinéaires.

- 2) Calculons le déterminant des vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 6 \times (-2) = -3 + 12 = 9$$

Le déterminant n'est pas nul, donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Remarque : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si leur coordonnées sont proportionnelles. Parfois le calcul du déterminant ne s'impose pas car le rapport est immédiat. C'est le cas par exemple de : $\vec{u}(2; 4)$ et $\vec{v}(4; 8)$ où on observe : $\vec{v} = 2\vec{u}$

5.5 Exercices d'application

5.5.1 Exercice 1

Dans les cas suivants, les point M , N et P sont-il alignés ?

- 1) $M(4; -1)$, $N(7; -3)$, $P(-5; 5)$
- 2) $M(-2; 3)$, $N(-3; 7)$, $P(-5; 14)$
- 3) $M\left(2, -\frac{1}{3}\right)$, $N(3; -1)$, $P(0; 1)$



- 1) Si les point M , N et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires. Calculons alors leur déterminant :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= \begin{vmatrix} 7-4 & -5-(-1) \\ -3-(-1) & 5-(-1) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 18 - 18 \\ &= 0\end{aligned}$$

Le déterminant est nul donc les vecteurs sont colinéaires et donc les points M , N et P sont alignés.

- 2) Si les point M , N et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires. Calculons alors leur déterminant :

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= \begin{vmatrix} -3+2 & -5-(-2) \\ 7-3 & 14-3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} \\ &= -11 + 12 \\ &= 1\end{aligned}$$

Le déterminant n'est pas nul donc les vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points M , N et P ne sont pas alignés.

- 3) Si les point M , N et P sont alignés, alors les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires. Calculons alors leur déterminant :

$$\begin{aligned}
 \det(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}) &= \begin{vmatrix} 3-2 & 0-2 \\ -1 - \left(-\frac{1}{3}\right) & 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Le déterminant est nul donc les vecteurs sont colinéaires et donc les points M , N et P sont alignés.

5.5.2 Exercice 2

Le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormal. On donne les points suivants :

$$A(-4; -1), \quad B(4; -2), \quad C(8; 5), \quad D(0; 6)$$

- 1) a) Démontrer que $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.
- b) Calculer les distances AB et BC
- 2) En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$



- 1) a) On appelle I le milieu de $[AC]$ et J le milieu de $[BD]$. Calculons les coordonnées de I et J .

$$I = \begin{pmatrix} \frac{-4+8}{2} \\ \frac{-1+5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \frac{4+0}{2} \\ \frac{-2+6}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On a donc $I = J$. Les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu.

- b) Calculons les distances AB et BC :

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(4 - (-4))^2 + (-2 + 1)^2} = \sqrt{64 + 1} = \sqrt{65} \\
 BC &= \sqrt{(8 - 4)^2 + (5 + 2)^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}
 \end{aligned}$$

On a donc : $AB = BC$

- 2) Le quadrilatère $ABCD$ a ses diagonales qui se coupent en leurs milieu et possède deux côté consécutifs de même longueur, donc $ABCD$ est un losange.

5.5.3 Exercice 3

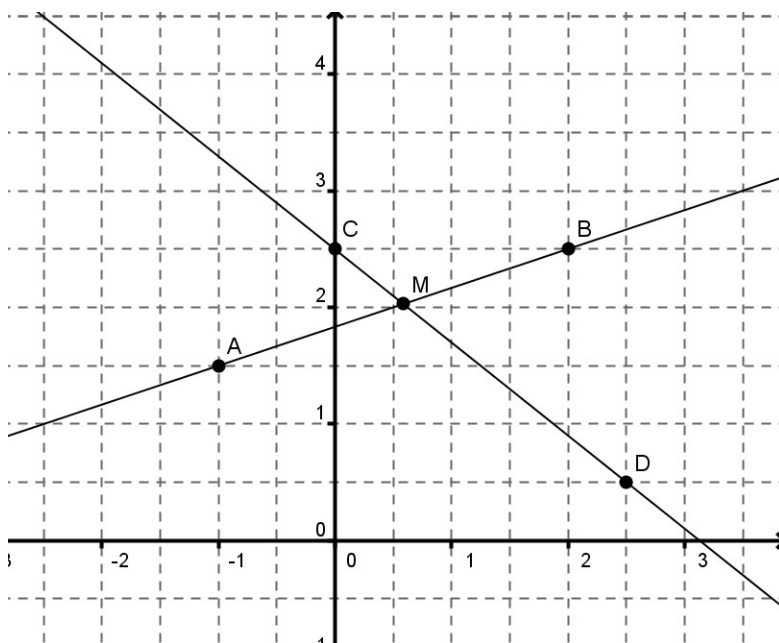
Placer les points $A\left(-1; \frac{3}{2}\right)$, $B\left(2; \frac{5}{2}\right)$, $C\left(0; \frac{5}{2}\right)$ et $D\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Le but de cet exercice est de trouver les coordonnées du point d'intersection M des droites (AB) et (CD) .

- 1) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
 b) Prouver que les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
- 2) On appelle k le réel tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
 a) Exprimer les coordonnées de M en fonction de k .
 b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{CM}$ en fonction de k .
 c) En utilisant la condition de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$, calculer k .
 d) En déduire les coordonnées du point M .



Faisons d'abord une figure :



- 1) a) Calculons les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$$

- b) Si les droites (AB) et (CD) sont sécantes, alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires. Calculons leur déterminant :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - \frac{5}{2} = -\frac{17}{2}$$

Le déterminant est non nul, les droites (AB) et (CD) sont donc sécantes.

2) a) De l'égalité $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} x - (-1) = 3k \\ y - \frac{3}{2} = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 1 \\ y = k + \frac{3}{2} \end{cases}$$

b) On en déduit alors les coordonnées du vecteurs $\overrightarrow{CM}$:

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 3k - 1 - 0 \\ k + \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k - 1 \\ k - 1 \end{pmatrix}$$

c) Comme M appartient aussi à la droite (CD) alors les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont donc colinéaires. Leur déterminant est nul donc :

$$\det \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CD} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3k - 1 & \frac{5}{2} \\ k - 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-6k + 2 - \frac{5}{2} \times (k - 1) = 0$$

$$-\frac{17}{2}k = -2 - \frac{5}{2}$$

$$-\frac{17}{2}k = -\frac{9}{2}$$

$$k = \frac{9}{17}$$

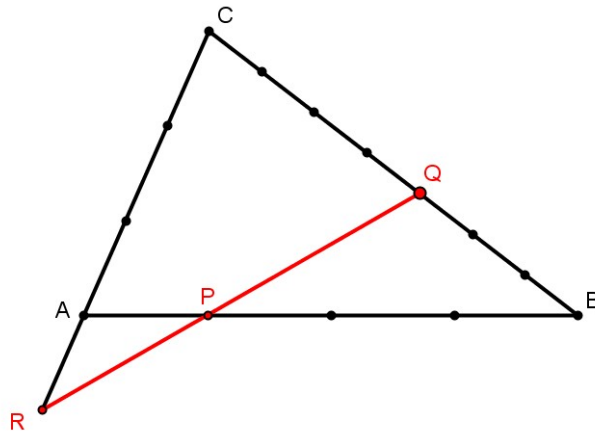
d) On remplace cette valeur dans les coordonnées de $M(x; y)$.

On trouve alors :

$$\begin{cases} x = 3 \times \frac{9}{17} - 1 = \frac{10}{17} \\ y = \frac{9}{17} + \frac{3}{2} = \frac{69}{34} \end{cases}$$

5.5.4 Exercice 4

ABC est un triangle, P est un point de (AB) , Q un point de (BC) et R un point de (CA) disposés comme sur le dessin. Les graduations sur les droites sont régulières. Démontrer que les points P , Q et R sont alignés.



En l'absence de tout repère, on peut se donner comme repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$. Pour montrer que les points P , Q et R sont alignés, il faut montrer que les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont colinéaires. Il faut donc que le déterminant de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ soit nul.

D'après les graduations du dessin, on obtient comme coordonnées par les points P et R :

$$R \left(0; -\frac{1}{3} \right) \quad P \left(\frac{1}{4}; 0 \right)$$

Pour le point Q , on utilise la relation :

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

On obtient alors les coordonnées de $Q \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right)$.

On calcule ensuite les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$

$$\overrightarrow{RP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - 0 \\ 0 + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{RQ} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} - 0 \\ \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{16}{21} \end{pmatrix}$$

On calcule ensuite le déterminant de $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$:

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{16}{21} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{16}{21} - \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{21} - \frac{4}{21} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont donc colinéaires et donc les points sont alignés.