Équations de droite. Système d'équations

Table des matières

1 Équations de droite **2**

1.1 Vecteur directeur d'une droite 2

1.2 Équation cartésienne d'une droite 2

1.3 Équation réduite d'une droite 3

1.4 Droites particulières 4

1.5 Parallélisme de deux droites 5

2 Système d'équations linéaires **5**

2.1 Définition 5

2.2 Existence de solution 5

2.3 Méthode par addition 6

2.4 Résolution par substitution 6

2.5 Méthode dites par comparaison 7

2.6 Systèmes particuliers 8

2.6.1 Deux droites strictement parallèles 8

2.6.2 Deux droites confondues 8

2.7 Système non linéaire se ramenant à un système linéaire 9

1 Équations de droite

1.1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 1 : Soit une droite d définie par deux points A et B. Un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d est le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarque : Le vecteur $\vec{u}$ n'est pas unique, car 2 points quelconques de la droite définissent un vecteur directeur. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs de la droite d, alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. On a donc $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Exemple : Soit la droite (AB) définie par :

$$A(3;-5) \quad \text{et} \quad B(2;3)$$

Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB), on alors :

$$\vec{u} = (2-3\,;\,3-(-5)) = (-1;8)$$

Théorème 1 : Une droite est entièrement définie si l'on connaît un point A et une vecteur directeur $\vec{u}$.

Démonstration : La démonstration est immédiate car à partir du point A et du vecteur directeur $\vec{u}$, on peut déterminer un autre point B tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

1.2 Équation cartésienne d'une droite

Théorème 2 : Soit une droite d du plan déterminée par un point $A(x_A;y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$, avec a et b non tous les deux nuls. Un équation cartésienne de la droite d est du type :

$$d \;:\; ax + by + c = 0$$

Démonstration : Soit un point $M(x;y)$ un point quelconque de la droite d. On a alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires. Donc leur déterminant est nul.

On a : $\overrightarrow{AM} = (x - x_A; y - y_A)$, donc :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_A & -b \\ y - y_A & a \end{vmatrix} = 0$$

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$$

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0$$

On pose $c = -(x_A + y_A)$, on a donc :

$$ax + by + c = 0$$

Exemple : Soit la droite d définie par les point $A(2;3)$ et $\vec{u}(-2;1)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

En posant $M(x;y)$, on a :

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 \\ y-3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2) + 2(y-3) = 0$$

$$\begin{aligned} x + 2y - 2 - 6 &= 0 \\ x + 2y - 8 &= 0 \end{aligned}$$

Remarque : L'équation cartésienne d'une droite n'est pas unique. On peut toujours multiplier les coefficients par un facteur k non nul. Par exemple, on peut trouver pour la droite de l'exemple : $-2x - 4y + 16 = 0$ en multipliant par (-2).

1.3 Équation réduite d'une droite

Définition 2 : Soit une droite définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$, avec $b \neq 0$ (droite non verticale). On peut alors mettre une équation cartésienne de la droite d sous la forme :

$$d \; : \; y = mx + p$$

où m représente le coefficient directeur de la droite d et p l'ordonnée à l'origine.

Cette équation est appelée « **équation réduite** » de la droite d. Un vecteur directeur est alors $\vec{v}(1;m)$.

Démonstration : Une équation cartésienne de la droite d est donc du type :

$$ax + by + c = 0$$

Comme $b \neq 0$, on peut diviser cette équation par b, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{a}{b}x + y + \frac{c}{a} &= 0 \\ y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \end{aligned}$$

En posant $m = -\dfrac{a}{b}$ et $p = -\dfrac{c}{a}$, on obtient :

$$y = mx + p$$

On peut choisir comme vecteur directeur $\vec{v}$ colinéaire à $\vec{u}$ en divisant les coordonnées de celui-ci par $-b$. On obtient alors :

$$\vec{v} = \left(1; -\frac{a}{b}\right) \quad \text{comme } m = -\frac{a}{b}, \quad \text{on a :} \quad \vec{v} = (1; m)$$

Remarque : lorsque l'on peut trouver l'équation réduite de la droite d, celle-ci est alors la représentation d'une fonction linéaire.

Théorème 3 : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points d'une droite d tels que $x_B - x_A \neq 0$, on peut alors trouver les coefficients de l'équation réduite de d. On a alors :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{et} \qquad p = y_A - m x_A$$

Démonstration : Je vous renvoie au chapitre sur les fonctions affines où ces relations ont été démontrées.

Exemple : Soit la droite (AB) définie par :

$$A(-1; 4) \quad \text{et} \quad B(2; 6)$$

Déterminer l'équation réduite de la droite d.

On a alors :

$$m = \frac{6-4}{2-(-1)} = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad p = 4 - \frac{2}{3}(-1) = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$$

On a alors l'équation réduite de la droite (AB) :

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{14}{3}$$

1.4 Droites particulières

Définition 3 : Un **droite horizontale** (parallèle à l'axe des abscisses) a comme équation :

$$y = a$$

Un **droite verticale** (parallèle à l'axe des ordonnées) a comme équation :

$$x = b$$

1.5 Parallélisme de deux droites

Théorème 4 : Deux droites de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ou de coefficients directeurs m et m' sont paralléles si, et seulement si :

- Leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On a donc :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

- Leurs coefficients directeurs sont égaux. On a alors :

$$m = m'$$

2 Système d'équations linéaires

2.1 Définition

Définition 4 : On appelle système d'équations linéaires de deux équations à deux inconnues, le système défini par :

$$S \quad \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Exemple : Soit le système défini par :

$$S \quad \begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$$

(S) est donc un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

2.2 Existence de solution

Chaque équation d'un système linéaire à deux inconnue (S) est assimilable à une équation cartésienne d'une droite. On peut donc assimiler le système linéaire de deux équations à l'intersection de deux droites.

Théorème 5 : L'existence de solution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues dépend de l'intersection des deux droites (D_1) et (D_2) vérifiant chacune l'une des équations du système. Trois cas peut alors se produire :

- Les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes. Il existe alors une unique solution au système : les coordonnées du point d'intersection de (D_1) et (D_2).
- Les droites (D_1) et (D_2) sont strictement parallèles. Il n'existe aucune solution au système.
- Les droites (D_1) et (D_2) sont confondues. Il existe alors une droite solution au système.

Les droites composant le système sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. On crée alors un déterminant, noté δ défini par :

$$\delta = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le déterminant du système $\delta \neq 0$.

Les droites sont parallèles si et seulement si le déterminant du système $\delta = 0$.

➪ Les droites sont strictement parallèles si $\dfrac{c}{a} \neq \dfrac{c'}{a'}$

➪ Les droites sont confondues si $\dfrac{c}{a} = \dfrac{c'}{a'}$

2.3 Méthode par addition

Soit le système suivant : $\begin{cases} 3x - 7y = 1 & (\times -5) \quad (\times 2) \\ 5x + 2y = 29 & (\times 3) \quad (\times 7) \end{cases}$

La méthode par addition consiste à multiplier les équations par des coefficients de façon à éliminer une inconnue par addition des deux équations. Pour trouver ces coefficients, il suffit de déterminer le PPCM (plus petit commun multiple). Si l'on veut éliminer x, comme les coefficients devant x sont respectivement 3 et 5, le PPCM est 15, il suffit donc de multiplier la 1re équation par (-5) et la 2e équation par 3. Il est à noter ici comme les coefficients devant x sont de même signe, et que l'on veut éliminer x par addition, il est nécessaire de multiplier les équations par des coefficients de signes contraires. Pour éliminer y, les coefficients devant y sont respectivement -7 et 2, le PPCM est ici 14. On multiplie alors la 1re équation par 2 et la 2e équation par 7. Ce qui donne :

$$\begin{array}{r} -15x + 35y = -5 \\ 15x + 6y = 87 \\ \hline 0x + 41y = 82 \\ y = \dfrac{82}{41} = 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6x - 14y = 2 \\ 35x + 14y = 203 \\ \hline 41x + 0y = 205 \\ x = \dfrac{205}{41} = 5 \end{array}$$

Cette méthode est très efficace, car même lorsque les coefficients ne sont pas simples, cela n'entraine pas des fractions ce qui simplifie d'autant les calculs.

2.4 Résolution par substitution

Soit le système suivant : $\begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 5x + 2y = 29 \end{cases}$

La méthode par substitution consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre et « substituer » cette inconnue par cette expression dans la seconde équation.
On isole, par exemple x dans la première équation, cela donne :

$$\begin{aligned} 3x &= 1 + 7y \\ x &= \frac{1 + 7x}{3} \end{aligned}$$

on remplace x par cette expression dans la seconde équation, cela donne :

$$\frac{5(1+7y)}{3} + 2y = 29$$

on multiplie par 3

$$\begin{aligned}
5(1+7y) + 6y &= 87 \\
5 + 35y + 6y &= 87 \\
35y + 6y &= 87 - 5 \\
41y &= 82 \\
y &= \frac{82}{41} = 2
\end{aligned}$$

on remplace $y = 2$ dans l'expression de x

$$x = \frac{1 + 7 \times 2}{3} = \frac{1+14}{3} = 5$$

La solution est donc $x = 5$ et $y = 2$

Cette méthode est efficace seulement lorsque les coefficients devant les inconnues sont simples. Ici elle s'avére très calculatoire. Voici un système où les coefficients sont plus simple. La méthode par substitution peut s'avérer un bon choix

Soit le système suivant : $\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x + 4y = 10 \end{cases}$

On isole x dans la première équation, cela donne :

$$x = 7 - 5y$$

on remplace x par cette expression dans la seconde équation, cela donne :

$$\begin{aligned}
3(7-5y) + 4y &= 10 \\
21 - 15y + 4y &= 10 \\
-11y &= 10 - 21 \\
x &= \frac{-11}{-11} = 1
\end{aligned}$$

on remplace $y = 1$ dans l'expression de x

$$x = 7 - 5 \times 1 = 2$$

La solution est donc $x = 2$ et $y = 1$

2.5 Méthode dites par comparaison

Lorsque les coefficients devant les inconnues ne sont pas très compliqués, on préfèrera une méthode mixte, c'est à dire que l'on détermine la 1re inconnue par addition et la 2e inconnue par substitution.

Soit le système suivant : $\begin{cases} 3x - 7y = 1 & (\times -5) \\ 5x + 2y = 29 & (\times 3) \end{cases}$

Déterminons y par addition et x par substitution.

$$\begin{array}{r} -15x + 35y = -5 \\ 15x + 6y = 87 \\ \hline 0x + 41y = 82 \\ y = \dfrac{82}{41} = 2 \end{array}$$

On remplace $y = 2$ dans la 1^re^ équation

$$\begin{aligned} 3x - 7 \times 2 &= 1 \\ 3x - 14 &= 1 \\ 3x &= 15 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

2.6 Systèmes particuliers

On étudiera sur deux esemples les deux cas qui peuvent se poser.

2.6.1 Deux droites strictement parallèles

Soit le système suivant : $\begin{cases} 4x + 6y = 5 \\ 6x + 9y = 7 \end{cases}$

On calcule le déterminant : $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 6 \times 6 = 0$

Comme le déterminant est nul, les droites associées aux équations sont parallèles. Pour savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues, on calcule :

$$\frac{a}{a'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{c}{c'} = \frac{5}{7} \quad \text{donc} \quad \frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$$

Les rapports ne sont pas égaux donc les droites sont strictement parallèles et donc le système m'admet pas de solution.

$$S = \varnothing$$

2.6.2 Deux droites confondues

Soit le système suivant : $\begin{cases} 4x + 6y = 6 \\ 6x + 9y = 9 \end{cases}$

On calcule le déterminant : $\delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 4 \times 9 - 6 \times 6 = 0$

Comme le déterminant est nul, les droites associées aux équations sont parallèles. Pour savoir si elles sont strictement parallèles ou confondues, on calcule :

$$\frac{a}{a'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{c}{c'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad \frac{a}{a'} = \frac{c}{c'}$$

Les rapports sont égaux donc les droites sont confondues et donc le système admet une droite solution d'équation : $2x + 3y - 3 = 0$ (1^re^ équation simplifiée)

2.7 Système non linéaire se ramenant à un système linéaire

Soit le système suivant : $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 3 \\ x^2 + 2y^2 = 22 \end{cases}$

Le système n'est pas linéaire car les inconues apparaissent au 2^{e} degré. Pour résoudre ce système, on fait un changement de variable de façon à rendre ce système linéaire :

On pose : $X = x^2$ et $Y = y^2$ avec $X \geqslant 0$ et $Y \geqslant 0$

Le système devient : $\begin{cases} 3X - Y = 3 & (\times 2) \\ X + 2Y = 22 & (\times 1) \end{cases}$

On résout alors ce nouveau système :

Déterminons X par addition et Y par substitution.

$$\begin{array}{r} 6X - 2Y = 6 \\ X + 2Y = 22 \\ \hline 7X + 0Y = 28 \\ X = \dfrac{28}{7} = 4 \\ \text{donc } X \geqslant 0 \end{array}$$

On remplace $X = 4$ dans la 1re équation

$$\begin{aligned} 12 - Y &= 3 \\ -Y &= -9 \\ Y &= 9 \\ \text{donc } Y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

On revient à x et y

On a : $x^2 = 4$ et : $y^2 = 9$

donc $x = 2$ ou $x = -2$ donc $y = 3$ ou $y = -3$

On a alors 4 couples solution : $S = \{(-2;3);(-2;-3);(2;-3);(2;3)\}$

Si l'on veut une interprétation géométrique, le système revient à chercher l'intersection d'une hyperbole (équation 1) et d'une ellipse (équation 2). Cela n'est évidemment pas au programme :