Les Nombres

Table des matières

1 Introduction

Les nombres sont au cœur des mathématiques. Leur utilisation, sans appréhension, est essentiel. Pour les manier, il est nécessaire de bien connaître les règles qui les régissent. Ce chapitre a pour but de dresser un panorama des différents ensembles de nombres et de revoir leurs propriétés.

2 Les entiers naturels : N

2.1 Définition

Définition 1 : L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, est l'ensemble des entiers positifs ou nuls : $\mathbb{N} = \{0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,,\ldots\}$

Dans cet ensemble, on utilise quatre opérations, l'addition et la multiplication, d'une part, qui sont toujours possibles et la soustraction et la division, d'autre part, qui ne sont possibles que dans certaines conditions.

L'**arithmétique** est la discipline mathématique qui travaille dans cet ensemble.

Utiliser les entiers est l'occasion de s'exercer au calcul mental. La calcul joue un rôle important et il est essentiel de réapprendre à calculer mentalement pour pouvoir suivre un cours de mathématiques. Le **calcul mental** est une question d'entraînement comme les gammes d'un pianiste. C'est un **automatisme** qui permet de se débarrasser de la part du calcul pour se concentrer sur le raisonnement. Au lieu de prendre une calculatrice pour des calculs simples, faites les mentalement. Petit à petit le mécanisme va revenir. Un quart d'heure de calcul mental par jour et vos tables de multiplication seront à nouveau bien en mémoire.

2.2 Règles de divisibilité

Règle 1 : Par une terminaison : 2, 5, 10, 25, 4

- un entier est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6, 8
- un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5
- un entier est divisible par 10 s'il se termine par 0
- un entier est divisible par 25 s'il se termine par 00, 25, 50, 75
- un entier est divisible par 4 si le nombre formé par les 2 derniers chiffres est divisible par 4 : 1 9**32** est divisible par 4 et 1 7**14** ne l'est pas.

Règle 2 : Par somme ou différence de ses chiffres : 3, 9, 11

- Un entier est divisible par 3 (resp. par 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp. par 9).
  8 232 divisible par 3 car $8+2+3+5=15$ divisible par 3.
  4 365 divisible par 9 car $4+3+6+5=18$ divisible par 9.
- Un entier de trois chiffres est divisible par 11 si la somme des chiffres extrêmes est égale à celui du milieu.
  451 est divisible par 11 car $4+1=5$ et $\mathbf{451}=11\times 41$
- D'une façon générale un entier est divisible par 11 si la différence entre la somme des chiffres de rangs pairs et la somme des chiffres de rangs impairs est divisible par 11.
  6 **457** divisible par 11 car $(7+4)-(5+6)=11-11=0$ divisible par 11.
  4 **939** divisible par 11 car $(9+9)-(3+4)=18-7=11$ divisible par 11.

Remarque :

- Ces petits calculs sont à faire mentalement car il permettent ainsi d'exercer sa mémoire et ses automatismes.
- On peut combiner deux critères pour montrer la divisibilité :
  36 054 est divisible par 18 car divisible par 2 et par 9 $(3+6+0+5+4=18)$.

2.3 Décomposition en nombres premiers

Définition 2 : Un entier est un nombre premier s'il possède exactement deux diviseurs 1 et lui-même.

Remarque :

- Le premier nombre premier est 2 car 1 ne possède qu'un seul diviseur 1.
  Tous les autres nombres premiers sont impairs.
- Les 25 nombres premiers inférieurs à 100 en utilisant les règles de divisibilité : (mémorisez les au moins jusqu'à 50)
  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Théorème 1 : Tout entier $n \geqslant 2$ peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

Pour cette décomposition, on divise successivement l'entier n par ses diviseurs premiers dans un **ordre croissant**.

Exemples :

Quotients	Diviseurs
48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

donc $48 = 2^4 \times 3$
On aurait pu aller plus vite en considérant : $48 = 8 \times 6$
or $8 = 2^3$ et $6 = 2 \times 3$ donc
$48 = 2^3 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$

Quotients	Diviseurs
490	2
245	5
49	7
7	7
1	

$490 = 2 \times 5 \times 7^2$

Quotients	Diviseurs
1 287	3
429	3
143	11
13	13
1	

$1\,287 = 3^2 \times 11 \times 13$

3 Les entiers relatifs : Z

Définition 3 : L'ensemble des entiers relatifs est $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}$ pour « *zählen* » compter en allemand.

Aux entiers naturels, on associe un signe : $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

La soustraction peut alors être associéé à une addition. En effet lorsque l'on soustrait cela revient à ajouter l'opposé : $5 - 3 = 5 + (-3)$.

Donc dans $\mathbb{Z}$, il n'y a que 3 opérations : addition, multiplication et division.

Deux exemples pour additionner et multiplier avec des signes :

- $-3 + 9 = 6$ ⚠ pas de règle de signe $+$ par $-$ égal $-$ (donc pas de -6)
- $-9 - 3 = -12$ ⚠ pas de règle de signe $-$par $-$ égal $+$ (donc pas de $+12$)
- Lorsque l'on multiplie la règle des signes s'impose : $(-9) \times (-3) = 27$

4 Les nombres rationnels : Q

Définition 4 : L'ensemble des nombres rationnels Q est l'ensemble des nombres q, qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction, c'est à dire :

$$q = \frac{a}{b} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers avec } b \neq 0$$

a est le **numérateur** et b le **dénominateur**.

Remarque : Le choix de la lettre, Q comme quotient

- Tout entier est un rationnel : prendre $b = 1$.

- Un nombre rationnel $q = \frac{a}{b}$ s'écrit sous la forme d'une **fraction irréductible** avec a et b premiers entre eux (pas de diviseurs communs)
- Le signe d'une fraction peut se mettre soit devant la fraction soit au numérateur mais pas au dénominateur ($b \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$).

Exemples :

- $\frac{72}{54}$ non irréductible, 18 diviseur commun d'où $\frac{72}{18} \overset{\div 18}{=} \frac{4}{3}$ irréductible
- $\frac{2}{-3}$ s'écrit $-\frac{2}{3}$ ou $\frac{-2}{3}$

Passons en revue les différentes opérations avec les rationnels : addition, multiplication et division.

4.1 L'addition

> **Règle 3 :** Pour additionner deux fractions, il est nécessaire de mettre les deux fractions au même dénominateur : le **dénominateur commun**.
> On cherche le plus petit multiple commun des deux dénominateurs.

Exemples :

- $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = ?$ On met chaque fraction sur 12 multiple de 3 et 4, on obtient donc :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$$

- $\frac{15}{8} - \frac{13}{12} = ?$ On cherche dans la table de 8 un multiple de 12, on trouve 24.

  ⚠ 24 est préférable à $8 \times 12 = 96$ qui est un multiple commun mais qui n'est pas le plus petit et complique inutilement le calcul.

$$\frac{15}{8} - \frac{13}{12} = \frac{15 \times 3}{24} - \frac{13 \times 2}{24} = \frac{45 - 26}{24} = \frac{19}{24}$$

- $\frac{8}{3} + \frac{5}{18} - \frac{4}{9} = ?$

  On généralise le dénominateur commun à trois fractions. On cherche le plus petit multiple commun à 3, 18 et 9. On a 18 multiple de 3 et 9 donc 18 est le multiple commun ⚠ ne pas prendre $3 \times 18 \times 9$:

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{18} - \frac{4}{9} = \frac{8 \times 6 + 5 - 4 \times 2}{18} = \frac{48 + 5 - 8}{18} = \frac{45}{18} \overset{\div 9}{=} \frac{5}{2}$$

  ⚠ Mettre la fraction finale sous forme irréductible si cela est nécessaire.

4.2 La multiplication

Règle 4 : Pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs et les dénominateurs entre eux.
Avant de multiplier, on **cherchera à simplifier** tant que cela est possible : diviser par un diviseur commun le numérateur et le dénominateur.

Exemples :

- $\dfrac{3}{2} \times \dfrac{-11}{9} = ?$ $\qquad \dfrac{3}{2} \times \dfrac{-11}{9} = -\dfrac{\cancel{3} \times 11}{2 \times \cancel{9}} = -\dfrac{1 \times 11}{2 \times 3} = -\dfrac{11}{6}$

  ⚠ simplification du « 3 du haut » avec le « 9 du bas ».

- $\dfrac{3}{8} \times \dfrac{7}{6} \times \dfrac{4}{9} = ?$ $\qquad \dfrac{3}{8} \times \dfrac{7}{6} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{\cancel{3} \times 7 \times \cancel{4}}{\cancel{8} \times 6 \times \cancel{9}} = \dfrac{1 \times 7 \times 1}{2 \times 6 \times 3} = \dfrac{7}{36}$

  ⚠ simplification des « 3 et 4 du haut » avec les « 9 et 8 du bas ».

- $\dfrac{14}{15} \times \dfrac{121}{21} \times \dfrac{9}{22} = ?$

  $$\dfrac{14}{15} \times \dfrac{121}{21} \times \dfrac{9}{22} = \dfrac{\cancel{14} \times \cancel{121} \times \cancel{9}}{\cancel{15} \times \cancel{21} \times \cancel{22}} = \dfrac{2 \times 11 \times 3}{5 \times 3 \times 2} = \dfrac{1 \times 11 \times 1}{5 \times 1 \times 1} = \dfrac{11}{5}$$

  ⚠ simplification des « 14, 121 et 9 du haut » avec les « 21, 22 et 15 du bas ».

- C'est un bon exercice pour revoir ses tables de multiplication. Il est bénéfique d'effectuer ces calculs sans calculatrice.
  On peut aussi décomposer chaque nombre en facteurs premiers.
  Dans l'exemple précédent, on peut écrire :

$$\dfrac{14}{15} \times \dfrac{121}{21} \times \dfrac{9}{22} = \dfrac{(2 \times 7) \times 11^2 \times 3^2}{(3 \times 5) \times (3 \times 7) \times (2 \times 11)} = \dfrac{\cancel{2} \times \cancel{3^2} \times \cancel{7} \times \cancel{11^2}}{\cancel{2} \times \cancel{3^2} \times 5 \times \cancel{7} \times \cancel{11}} = \dfrac{11}{5}$$

4.3 La division

Règle 5 : Pour diviser deux fractions, il suffit de multiplier la première par l'inverse de la seconde.
La division est alors une multiplication dans l'ensemble Q.

Exemple : $\dfrac{\frac{17}{25}}{\frac{34}{27}} = ?$ ou $\dfrac{17}{25} \div \dfrac{34}{27} = ?$

$$\dfrac{17}{25} \div \dfrac{34}{27} = \dfrac{17}{25} \times \dfrac{27}{34} = \dfrac{\cancel{17} \times 27}{25 \times \cancel{34}} = \dfrac{1 \times 27}{25 \times 2} = \dfrac{27}{50}$$

⚠ simplification du « 17 du haut » avec le « 34 du bas ».

Remarque : Dans Q, il n'y a que deux opérations : l'addition et la multiplication.

⚠ Le trait principal de fraction (plus long) doit être au niveau du signe « = ».
Un trait de fraction mal placé peut conduire à un tout autre résultat.

$$\frac{2}{\frac{5}{8}} = 2 \times \frac{8}{5} = \frac{16}{5} \qquad \text{et} \qquad \frac{\frac{2}{5}}{8} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{20}$$

4.4 Règle de priorité

Règle 6 : La multiplication est prioritaire par rapport à l'addition lorsque les deux opérations se présentent entre plusieurs fractions.
On effectue alors la multiplication puis l'addition.

Exemples :

- $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = ?$ $\qquad \frac{1}{6} + \frac{\cancel{2}}{5} \times \frac{1}{\cancel{4}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{5+3}{30} = \frac{8}{30} \overset{\div 2}{=} \frac{4}{15}$

- Si l'addition est à effectuer en premier, on met des parenthèses :

$$\left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{4} = ? \qquad \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{5}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{5+12}{30} \times \frac{1}{4} = \frac{17}{120}$$

4.5 Égalité entre deux fractions

Propriété 1 : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

Remarque : Cette propriété est connue sous le nom de **produit en croix**.

4.6 Comparaison entre deux fractions

Pour comparer deux fractions, il est nécessaire de les mettre au même dénominateur. On compare ensuite les numérateurs.

Exemple : Comparer les deux fractions suivantes : $\frac{10}{9}$ et $\frac{11}{10}$

On met les deux fractions au même dénominateur ici 90 : $\frac{100}{90}$ et $\frac{99}{90}$

On a alors : $\frac{10}{9} > \frac{11}{10}$.

5 Les nombres décimaux : D

Définition 5 : L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombre qui peuvent s'écrire avec un **nombre fini** de chiffres après la virgule.

Exemple : $\dfrac{1}{5} = 0,2$ est un décimal mais $\dfrac{1}{3} = 0,33\dots$ n'est pas un décimal.

Propriété 2 : Tout nombre décimal peut s'écrire sous la forme d'une fraction. Tout nombre décimal est alors un rationnel.
L'ensemble des décimaux est inclus dans celui des rationnels : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Exemple : $0,25 = \dfrac{1}{4}$ $\quad 0,36 = \dfrac{36}{100} = \dfrac{9}{25}$ $\quad$ mais $\quad \dfrac{1}{3} \neq 0,33.$

L'ensemble $\mathbb{D}$ est l'ensemble des sciences expérimentales. Les mesures n'étant possibles qu'avec un certain degré de précision, la valeur exacte importe peu.
En mathématiques, on écrit, sauf cas concrets, les nombres décimaux sous forme d'une fraction irréductible.

5.1 Comment reconnaître qu'un rationnel est un décimal

Notre système d'écriture des nombres est un système décimal et comme 10 n'a que deux diviseurs, 2 et 5, on a le théorème suivant :

Théorème 2 : Un nombre rationnel est décimal si, et seulement si, la décomposition du dénominateur de sa forme irréductible en produits de facteurs premiers est **exclusivement** composé de puissances de 2 ou de 5

Exemple : $\dfrac{15}{8}$ et $\dfrac{13}{50}$ sont des nombres décimaux car :

$$\frac{15}{8} = \frac{15}{2^3} \quad \text{et} \quad \frac{13}{50} = \frac{13}{2 \times 5^2}$$

Par contre : $\dfrac{9}{14} = \dfrac{9}{2 \times 7}$ n'est pas un décimal à cause du 7 au dénominateur.

5.2 Propriété d'un rationnel non décimal

Propriété 3 : L'écriture d'un nombre rationnel non décimal possède une série de chiffres qui se répète à l'infini.

Cette propriété arithmétique est basée sur le principe des tiroirs.

> Si l'on répartit $(n+1)$ chaussettes dans n tiroirs nécessairement il y a un tiroir qui possède au moins 2 chaussettes.

Cela veut dire que lorsqu'on divise deux entiers, on tombera à partir d'un certain nombre de divisions sur un reste déjà obtenu.

Exemple : Approximation du nombre π par Archimède : $\dfrac{22}{7}$

Les restes non nuls possibles dans la division par 7 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Il y a 6 restes possibles, au bout de 7 divisions, on est sûr d'obtenir un reste déjà obtenu.

$$\begin{array}{r|l}
22,0000000 & 7 \\
\hline
\mathbf{1}\ 0000000 & 3,\mathbf{142857}\ \mathbf{1}\dots \\
3000000 & \\
200000 & \\
60000 & \\
4000 & \\
500 & \\
\mathbf{10} & \\
3 &
\end{array}$$

À la 7e division on obtient le reste de 1 obtenu à la 1re division. La succession des restes se reproduira indéfiniment. Nous avons donc :

$$\frac{22}{7} = 3,142857\ 142857\cdots = 3,\overline{142857}$$

6 La notation scientifique

Pour les nombres très grands comme 10 000 000 000 000 « dix mille milliards », ou très petits comme 0,000 000 000 01 « un centième de milliardième », l'écriture décimale devient difficile à lire.
Une nouvelle notation est appliquée, basée sur les puissances de 10 et le premier chiffre non nul du nombre.

6.1 Quelques points de repère avec les puissances de 10

- Multiples : $10^n = 1\overbrace{000\dots000}^{n \text{ zéros}}$ et $10^0 = 1$.

Les multiples				
Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^1	dix	10	déca	da
10^2	cent	100	hecto	h
10^3	mille	1 000	kilo	k
10^6	million	1 000 000	méga	M
10^9	milliard	1 000 000 000	giga	G
10^{12}	mille milliards	1 000 000 000 000	téra	T

- Sous-multiples : $10^{-n} = \dfrac{1}{10^n} = \dfrac{1}{1\,\underbrace{000\ldots000}_{n \text{ zéros}}}$

Les sous-multiples				
Notation	Signification	Écriture	Préfixe	Symbole
10^{-1}	dixième	0,1	déci	d
10^{-2}	centième	0,01	centi	c
10^{-3}	millième	0,001	milli	m
10^{-6}	millionième	0,000 001	micro	μ
10^{-9}	milliardième	0,000 000 001	nano	n
10^{-12}	millième de milliardième	0,000 000 000 001	pico	p

6.2 Définition et exemples

Définition 6 : Un nombre x en notation scientifique est de la forme :

$$x = a \times 10^n \quad \text{pour} \quad x \geqslant 1 \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant a < 10$$
$$x = a \times 10^{-n} \quad \text{pour} \quad 0 < x < 1 \quad \text{avec} \quad 1 \leqslant a < 10$$

Conséquence le nombre a ne possède qu'un chiffre non nul avant la virgule.

On détermine n en comptant le **nombre de décalages de la virgule**.

- $12\,420\,000\,000 = \mathbf{1},242 \times 10^{10}$: 10 décalages de la virgule vers la gauche.
- $0,000\,000\,000\,005\,607 = \mathbf{5},607 \times 10^{-12}$: 12 décalages de la virgule vers la droite.

Sur ces deux exemples le « 1 » et le « 5 » sont appelés premiers chiffres significatifs.

Inversement pour écrire en notation usuelle, on effectue le décalage inverse.

- $5,48 \times 10^8 = 548\,000\,000$: 8 décalages vers la droite
- $8,756\,1 \times 10^{-4} = 0,000\,875\,61$: 4 décalages vers la gauche.

7 Calculs avec les puissances

7.1 Règles de calcul

Propriété 4 :

- $a^0 = 1$ exemple : $2^0 = 1$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$ exemple : $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ exemple : $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$ exemple : $(7^2)^5 = 7^{2\times 5} = 7^{10}$
- $(ab)^n = a^n b^m$ exemple : $(4x)^3 = 4^3x^3 = 64x^3$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ exemple : $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{5^2}{3^2} = \dfrac{25}{9}$

7.2 Exemple de calcul

Calculer le nombre suivant sans utiliser une calculatrice : $A = \dfrac{2^8 \times 9^3 \times 25^2}{12^3 \times 5^2}$

- On décompose en facteurs premiers $A = \dfrac{2^8 \times (3^2)^3 \times (5^2)^2}{(2^2 \times 3)^3 \times 5^2}$.
- On applique les règles sur les puissances : $A = \dfrac{2^8 \times 3^6 \times 5^4}{2^6 \times 3^3 \times 5^2}$.
- Puis sur les quotients : $A = 2^{8-6} \times 3^{6-3} \times 5^{4-2} = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$.
- On obtient alors : $A = 4 \times 27 \times 25 = (4 \times 25) \times 27 = 2\,700$.
  Une petite astuce avec 25 nous a permis de calculer sans effort !

8 Les nombres réels : R

On pourrait penser, au vu des nombres que l'on vient de voir, qu'ils suffisent à exprimer toutes les quantités mathématiques. Cependant, Pythagore a été l'un des premiers à montrer qu'il existait d'autres nombres.

En effet lorsque l'on cherche à exprimer la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, on trouve un nombre que l'on écrit maintenant $\sqrt{2}$.

Pythagore a démontré que ce nombre ne pouvait pas s'écrire comme le quotient de deux entiers. Ce nombre n'est donc pas un rationnel. Ainsi était prouvé qu'il existe des nombres non rationnels, que l'on appelle **irrationnels**.

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, il est nécessaire d'effectuer des calculs fastidieux, il faut « extraire » la racine carrée (voir algorithme de Héron).
Les calculatrices nous évitent ces calculs : $\sqrt{2} \approx 1,414\,213\ldots$

L'écriture décimale de ces nombres n'ont pas de série de chiffres qui se répète.

Propriété 5 : Un nombre est irrationnel lorsqu'il ne peut s'écrire comme rapport de deux entiers.

Exemples : Il existe beaucoup de sortes de nombres irrationnels :

- $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{17}\dots$ appelés radicaux
- π constante du cercle
- $\sin 12^\circ$, $\cos 27^\circ\dots$ nombres trigonométriques
- $\ln 2$, e... nombres logarithmiques ou exponentiels.

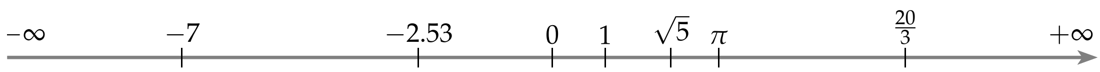
Remarque : On s'aperçoit que l'écriture des nombres irrationnels prend des formes très diverses. On donne en fait une écriture aux nombres que l'on utilisent fréquemment, mais d'autres encore non utilisés vous attendent pour un graphisme particulier et qui sont pour l'instant sans écriture.

Définition 7 : L'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$, est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

Remarque : Sa construction rigoureuse a été faite au XIXe siècle par Dedekind.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un ensemble continu, c'est à dire qu'il ne possède pas de « trou ».

On représente alors cet ensemble par une droite orientée.



9 Racines carrées

Définition 8 : La racine carrée d'un nombre réel positif ou nul a, est le nombre noté $\sqrt{a}$ tel que : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Conséquence La racine carrée d'un nombre négatif n'a aucun sens, car un carré ne peut être négatif.

Exemple : $\sqrt{0} = 0, \ \sqrt{1} = 1, \ \sqrt{4} = 2, \ \sqrt{9} = 3$ etc...

Mais la plupart des racines carrées sont des irrationnels :

$\sqrt{2} \approx 1,414\dots, \ \sqrt{3} \approx 1,732\dots$ que l'on mémorisera

⚠ Les mathématiciens recherchent des valeurs exactes non des valeurs approchées. Seule la notation avec un radical $\sqrt{\ }$ est exacte.

9.1 Simplification d'une racine

Règle 7 : La racine carrée du produit est égale au produit des racines :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Pour simplifier $\sqrt{n}$, on cherche à décomposer n en un produit dont l'un des facteurs est un carré.

$$12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3 \quad \text{donc} \quad \sqrt{12} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$
$$50 = 25 \times 2 = 5^2 \times 2 \quad \text{donc} \quad \sqrt{50} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

Règle 8 : La racine carrée d'un quotient est le quotient des racines :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Exemple : $\sqrt{\dfrac{18}{25}} = \dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}} = \dfrac{\sqrt{9 \times 2}}{5} = \dfrac{3\sqrt{2}}{5}$

⚠ Deux fautes fréquentes :

- On ne peut regrouper que des racines carrées identiques.
- La racine carrée de la somme n'est pas égale à la somme des racines carrées :

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Exemple : $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ne peut se regrouper, mais $5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$ car

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ et $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

9.2 Distributivité avec les racines carrées

Lorsque l'on effectue le produit d'une somme de racines carrées, on ne peut que distribuer pour effectuer le calcul.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) &= \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Pour effectuer le calcul d'un carré, utiliser les identités remarquables suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$$
$$\left(2\sqrt{3}-4\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 4 + 4^2 = 4 \times 3 - 16\sqrt{3} + 16 = 28 - 16\sqrt{3}$$

9.3 Comparaison de deux racines carrées

Règle 9 : Pour comparer deux racines carrées, on compare leur carré.

Exemple : Comparer les nombres $5\sqrt{6}$ et $6\sqrt{5}$

$$\left(5\sqrt{6}\right)^2 = 25 \times 6 = 150 \quad \text{et} \quad \left(6\sqrt{5}\right)^2 = 36 \times 5 = 180 \quad \text{donc} \quad 5\sqrt{6} < 6\sqrt{5}$$

9.4 Rendre rationnel un dénominateur

Règle 10 : Dans une fraction, lorsque le dénominateur ne contient qu'une racine, on multiplie numérateur et dénominateur par cette racine.

Exemples : $\dfrac{2}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

Règle 11 : Dans une fraction, lorsque le dénominateur est la somme d'un entier et d'une racine, on multiplie numérateur et dénominateur, par la quantité conjuguée.
La quantité conjuguée de $(a+\sqrt{b})$ est $(a-\sqrt{b})$ et réciproquement.

Remarque : Le produit des deux quantités donne une différence de deux carrés :

$$(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - (\sqrt{b})^2 = a^2 - b^2$$

Exemples : :

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} = 3-\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}{1-2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{-1} = -\sqrt{3}-\sqrt{6}$$