Les nombres

Les entiers naturels : $\mathbb{N}$

Ensemble construit en partant de 0 et dont le successeur de tout nombre (en ajoutant 1) appartient à cet ensemble.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \dots, \}$$

On définit dans cet ensemble les quatre opérations dont seulement l'addition et la multiplication sont toujours possibles.

L'étude des problèmes dans $\mathbb{N}$ s'appelle l'**arithmétique**. L'arithmétique élémentaire comprend, entre autre :

- Les règles de divisibilité élémentaire.
- L'ensemble des diviseurs d'un entier.
- Le pgcd et le ppcm de deux entiers.
- La décomposition en produit de facteurs premiers.

Les entiers relatifs : $\mathbb{Z}$

Ensemble construit en ajoutant à tout entier naturel un signe : "+" ou "−". Par convention, le signe "+" est omis.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

La soustraction dans cet ensemble peut être associée à une addition : $5 - 3 = 5 + (-3)$.

Règles régissant l'addition et la multiplication :

- Dans une addition de deux relatifs,
  1) l'entier le plus grand donne le signe.
  2) on additionne si les deux relatifs sont de même signe et l'on soustrait dans le cas contraire.

  $$-3 + 9 = 6 \quad \text{et} \quad -3 - 9 = -12$$
- Dans une multiplication, si le nombre de signes "−" est impaire, le résultat est négatif et positif dans le cas contraire. $(-3)(-9) = 27$ et $3(-9) = -27$.

Les nombres rationnels : $\mathbb{Q}$

Ensemble dont les nombres q sont le rapport de deux **entiers** :

$$q = \frac{a}{b} = \frac{\text{numérateur}}{\text{dénominateur}} \quad \text{avec } b \neq 0$$

- Tout entier est rationnel : prendre $b = 1$
- Le signe d'un rationnel se met devant la fraction ou au numérateur ($b > 0$).
- On ne change pas une fraction en multipliant par un même nombre numérateur et dénominateur.

On détermine deux opérations dans $\mathbb{Q}$: l'addition et la multiplication (cf fiche nbres rationnels).

Les nombres décimaux : $\mathbb{D}$

L'ensemble des nombres décimaux est construit à l'aide des fractions décimales : $\dfrac{1}{10^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Un nombre décimal possède un développement fini après la virgule.

$$\frac{3}{4} = 0,75 \in \mathbb{D} \text{ mais } \frac{4}{3} = 1,33\dots = 1,\overline{3} \notin \mathbb{D}$$

L'écriture scientifique

Un nombre décimal d en notation scientifique est de la forme avec $n \in \mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Si } d \geqslant 1, & d = a \times 10^n \\ \text{Si } d < 1, & d = a \times 10^{-n} \end{array}\right\} \text{ avec } \quad 1 \leqslant a < 10$$

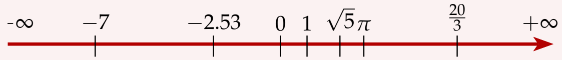
On a alors : $\begin{cases} 12\,420\,000\,000 = 1,242 \times 10^{10} \\ 0,000\,000\,000\,005\,607 = 5,607 \times 10^{-12} \end{cases}$

Les nombre réels : $\mathbb{R}$

Un nombre est **irrationnel** lorsqu'il ne peut s'écrire comme le rapport de deux entiers.
$\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\cos 27°$ sont des irrationnels.

La construction de l'ensemble $\mathbb{R}$ fait appel à la convergence de suites, on retiendra que $\mathbb{R}$ est l'**union des rationnels et des irrationnels**.

On peut représenté $\mathbb{R}$ par une droite orientée :



Puissance d'un nombre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$:

On note : $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$ et $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Par convention : $x^0 = 1$

Règle sur les puissances

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$ ex : $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
- $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ ex : $\dfrac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$ ex : $(7^2)^5 = 7^{2\times 5} = 7^{10}$
- $(ab)^n = a^n b^m$ ex : $(4x)^3 = 4^3x^3 = 64x^3$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ ex : $\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 = \dfrac{5^2}{3^2} = \dfrac{25}{9}$

Calculs sur les racines carrées

La racine carrée d'un nombre réel **positif ou nul** a, est le nombre réel noté $\sqrt{a}$ tel que :

$$(\sqrt{a})^2 = a \qquad \sqrt{\ } \text{ est le radical et } a \text{ le radicande}$$

- Simplification d'une racine : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$\sqrt{12} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{18}{25}} = \frac{\sqrt{9}\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$$

⚠ $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ mais $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

- Distributivité :

$$\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \sqrt{18}-\sqrt{12}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

- Comparaison : pour comparer deux racines, on compare leur carré :

$$5\sqrt{6} < 6\sqrt{5} \quad \text{car} \quad (5\sqrt{6})^2 = 25 \times 6 = 150 \text{ et } (6\sqrt{5})^2 = 36 \times 5 = 180$$

- Rendre rationnel un dénominateur : on multiplie soit par la racine soit par la quantité conjuguée (QC) :

$$\frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{4}{3+\sqrt{5}} = \frac{4\overbrace{(3-\sqrt{5})}^{\text{QC}}}{(3+\sqrt{5})\underbrace{(3-\sqrt{5})}_{\text{QC}}} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} = 3-\sqrt{5}$$

Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers

On retiendra les premiers **nombres premiers** : 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47

Quotients	Diviseurs
1 287	3
429	3
143	11
13	13
1	

On divise successivement l'entier donné par les nombres premiers par ordre croissant :

$$1\,287 = 3^2 \times 11 \times 13$$

Rationnel et décimal

- Un nombre rationnel est un nombre décimal si et seulement si la décomposition du dénominateur de sa forme irréductible en produits de facteurs premiers est exclusivement composé de puissances de 2 ou de 5.

$$\frac{11}{20} = \frac{11}{2^2 \times 5} \in \mathbb{D} \quad \text{mais} \quad \frac{9}{28} = \frac{9}{2^2 \times 7} \notin \mathbb{D}$$

- Un nombre rationnel non décimal possède dans son développement décimal une série de chiffres se répétant à l'infini : (principe des chaussettes et des tiroirs)

$$\frac{22}{7} = 3,142857\;142857\cdots = 3,\overline{142857}$$

Calculs sur les puissances

Calculer le nombre suivant sans utiliser une calculatrice : $A = \dfrac{2^8 \times 9^3 \times 25^2}{12^3 \times 5^2}$

- On décompose en facteurs premiers : $A = \dfrac{2^8 \times (3^2)^3 \times (5^2)^2}{(2^2 \times 3)^3 \times 5^2}$
- On enlève les parenthèses : $A = \dfrac{2^8 \times 3^6 \times 5^4}{2^6 \times 3^3 \times 5^2}$
- On regroupe les termes : $A = 2^{8-6} \times 3^{6-3} \times 5^{4-2} = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$
- D'où : $A = 4 \times 27 \times 25 = (4 \times 25) \times 27 = 2\,700$