Les équations du premier degré

Table des matières

1 Définition

La notion d'équation est liée à la notion d'inconnue souvent nommée x. Cependant pour qu'il y ait équation cela ne suffit pas. Il faut avoir en plus une égalité et surtout qu'elle ne soit pas toujours vérifiée. On peut donner la définition suivante :

Définition 1 : On appelle équation à une inconnue, une égalité qui n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) d'une quantité x appelée inconnue.

Conséquence Écrire une équation revient donc à se poser la question : pour quelle(s) valeur(s) de x l'égalité est-elle vérifiée ?

Exemple : Trois propositions : laquelle de ces expressions représente une équation

1) $7x + 3$

   Ce n'est pas une équation, mais une expression algébrique. Il n'y a pas d'égalité.

2) $2(2x + 3) = 4x + 6$

   Ce n'est pas une équation, mais une égalité qui est toujours vérifiée.

3) $2x + 5 = 7$

   C'est une équation car seule la valeur $x = 1$ vérifie l'égalité.

Définition 2 : Une équation du premier degré est une équation où l'inconnue x n'apparaît qu'à la puissance 1.

Exemples :

- $2x + 3 = 7x + 5$ est une équation du premier degré.
- $2x^2 + 5x - 7 = 0$ est une équation du second degré.
- $\dfrac{7x+1}{2x+3} = 5$ est une équation rationnelle[1].

2 Résolution d'une équation du premier degré

2.1 Règles de base

Il n'y a que deux règles de base pour résoudre une équation du premier degré. Cette grande simplicité de résolution explique la puissance de l'algèbre et son succès auprès des élèves.

1. Une équation rationnelle est une équation où l'inconnue apparaît au dénominateur

Règle 1 : On ne change pas une équation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'égalité.

Exemple : Soit l'équation : $2x + 3 = 5$

- Ajoutons (-3) de chaque côté de l'égalité, on a donc : $2x + 3 - 3 = 5 - 3$
- On obtient alors $2x = 2$

Remarque : Nous pouvons faire deux remarques

1) Dans la pratique on retiendra le raccourci, que tout le monde retient, pour faire passer un terme de l'autre côté de l'égalité, on le change de signe : de $2x + 3 = 5$ on fait passer le 3 de l'autre côté donc $2x = 5 - 3$
2) Cette règle permet de laisser l'inconnue à gauche de l'égalité. On dit qu'elle permet d'isoler l'inconnue.

Exemple : Soit l'équation : $5x + 7 = -3 + 2x$

- On isole l'inconnue en déplaçant le 7 et le $2x$, on obtient : $5x - 2x = -7 - 3$
- On regroupe les termes : $3x = -10$

Règle 2 : On ne change pas une équation si l'on multiplie ou divise par un même nombre non nul chaque terme de l'égalité.

Exemples : Soit les équations : $2x = 1$ et $3x = -10$

- On divise par 2 la première et par 3 la seconde, on obtient alors :

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x = -\frac{10}{3}$$

⚠ Dans cette deuxième règle, on ne change pas le signe. En effet, on ne dit pas "*dans l'équation* $2x = 1$ *le* 2 *passe de l'autre côté donc il change de signe*". On divise tout simplement.

Remarque : Cette deuxième règle permet de déterminer l'inconnue une fois celle-ci isolée.

2.2 Exemples de résolution

Voici quelques exemples typiques de résolution d'équation du premier degré. Chaque exemple permet de traiter les principales configurations rencontrées dans les équations.

2.2.1 Tout simple

Soit l'équation : $3x - 5 = -x + 2$

- On isole l'inconnue : $3x + x = 5 + 2$
- On regroupe les termes : $4x = 7$
- On divise par 4 donc : $x = \dfrac{7}{4}$
- On conclut par l'ensemble solution : $S = \left\{\dfrac{7}{4}\right\}$

2.2.2 Avec des parenthèses

Soit l'équation : $7(x+4) - 3(x+2) = 3(x-1) - (x+7)$

- On enlève les parenthèses : $7x + 28 - 3x - 6 = 3x - 3 - x - 7$
- On isole l'inconnue : $7x - 3x - 3x + x = -28 + 6 - 3 - 7$
- On regroupe les termes : $2x = -32$
- On divise par 2 : $x = -16$
- On conclut par l'ensemble solution : $S = \{-16\}$

2.2.3 Avec des fractions

Soit l'équation : $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{8} = x \quad (1)$

- On réduit au même dénominateur : $\dfrac{16x+3}{24} = \dfrac{24x}{24} \quad (2)$
- On multiplie par 24 : $16x + 3 = 24x \quad (3)$
- On isole l'inconnue : $16x - 24x = -3$
- On regroupe les termes : $-8x = -3$
- On divise par (-8) : $x = \dfrac{-3}{-8}$
- On simplifie les signes : $x = \dfrac{3}{8}$
- On conclut par l'ensemble solution : $S = \left\{\dfrac{3}{8}\right\}$

Remarque : Dans la pratique, on passe tout de suite de la ligne (1) à la ligne (3) en multipliant par le dénominateur commun, soit :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}x + \frac{1}{8} = x \\ (\times 24) \qquad & 16x + 3 = 24x \end{aligned}$$

2.2.4 Égalité entre deux fractions

Soit l'équation $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{4+5x}{3}$

- On effectue un produit en croix : $3(x-3) = 5(4+5x)$
- On développe : $3x - 9 = 20 + 25x$
- On isole l'inconnue : $3x - 25x = 9 + 20$
- On regroupe : $-22x = 29$
- On divise par (-22) : $x = -\dfrac{29}{22}$
- On conclut par l'ensemble solution : $S = \left\{-\dfrac{29}{22}\right\}$

2.2.5 Des fractions et des parenthèses

Soit l'équation : $\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{3(x-2)}{4} = \dfrac{-7x+2}{12} + 2$

- $(\times 12)$ $4(x+2) - 9(x-2) = -7x + 2 + 24$
- On enlève les parenthèses : $4x + 8 - 9x + 18 = -7x + 2 + 24$
- On isole l'inconnue : $4x - 9x + 7x = -8 - 18 + 2 + 24$
- On regroupe les termes : $2x = 0$
- On divise par 2 : $x = 0$
- On conclut par l'ensemble solution : $S = \{0\}$

2.3 Équations particulières

Ce sont des équations qui, après réduction, sont de la forme : $0x = b$. Nous sommes alors dans un cas particulier que nous allons traiter à l'aide des deux exemples ci-dessous.

2.3.1 Une équation impossible

Soit l'équation : $2(x+4) + 1 - 5x = 3(1-x) + 7$

- On développe : $2x + 8 + 1 - 5x = 3 - 3x + 7$
- On isole l'inconnue : $2x - 5x + 3x = -8 - 1 + 3 + 7$

Si on effectue les regroupements des x à gauche, on s'aperçoit qu'il n'y en a plus. On devrait mettre alors 0, mais comme on cherche la valeur de x, par convention on écrira $0x$. On obtient donc :

- On écrit : $0x = 1$

ce qui n'est manifestement jamais vérifiée. L'équation n'a donc aucune solution.

- L'ensemble solution est alors : $S = \varnothing$

Remarque : $\varnothing$ est le symbole de l'ensemble vide

2.3.2 Une infinité de solution

Soit l'équation : $3(2x+4)-2x = 14-2(1-2x)$

- On enlève les parenthèses : $6x+12-2x = 14-2+4x$
- On isole l'inconnue : $6x-2x-4x = -12+14-2$
- On regroupe les termes : $0x = 0$

ce qui, cette fois-ci, est toujours vrai pour toutes les valeurs de x. Toutes les valeurs de l'ensemble des réels conviennent.

- L'ensemble solution est alors : $S = \mathbb{R}$

2.4 Conclusion

On peut résumer les différentes éventualités d'une équation du premier degré dans le tableau suivant :

Règle 3 : Toute équation du premier degré peut se mettre sous la forme :

$$ax = b \quad \text{l'inconnue est isolée}$$

1) Si $a \neq 0$, l'équation admet une unique solution :

$$x = \frac{b}{a} \quad \text{donc} \quad S = \left\{\frac{b}{a}\right\}$$

2) Si $a = 0$
- et si $b \neq 0$ l'équation n'a pas de solution, donc : $S = \varnothing$
- et si $b = 0$ tout x réel est solution, donc : $S = \mathbb{R}$

Remarque : Comme dans le premier cas la solution est de la forme $\frac{b}{a}$, on peut donner une autre définition d'un nombre irrationnel. Un nombre x est irrationnel si et seulement si x n'est solution d'aucune équation du premier degré à coefficients entiers.

3 Développement d'une quantité algébrique

3.1 Par la distributivité

Comme son nom l'indique, on utilise la propriété de la multiplication par rapport à l'addition :

Règle 4 : Pour tous nombres réels a, b, c, et d on a la relation :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

C'est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemples :

1) Développer le polynôme $P(x) = (2x-3)(4x+5)$

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x-3)(4x+5) \\ P(x) &= 8x^2 + 10x - 12x - 15 \\ P(x) &= 8x^2 - 2x - 15 \end{aligned}$$

2) Développer de deux façons polynôme $Q(x) = 4(5x-1)(2x-1)$

   Comme on a deux multiplications, l'ordre dans lesquelles elles sont effectuées n'a pas d'importance.

   - Si on commence par multiplier par 4, on a :

$$\begin{aligned} Q(x) &= (20x-4)(2x-1) \\ Q(x) &= 40x^2 - 20x - 8x + 4 \\ Q(x) &= 40x^2 - 28x + 4 \end{aligned}$$

   - Si on commence par la deuxième multiplication

$$\begin{aligned} Q(x) &= 4(10x^2 - 5x - 2x + 1) \\ Q(x) &= 4(10x^2 - 7x + 1) \\ Q(x) &= 40x^2 - 28x + 4 \end{aligned}$$

3) Être efficace pour développer le polynôme

$$R(x) = (2x+1)(-x+3) - 3(5x+4)(x-2)$$

   Le deuxième terme commence par (-3), au lieu de rentrer le 3, mieux vaut rentrer le (-3) afin d'éviter une ligne supplémentaire.

$$\begin{aligned} R(x) &= -2x^2 + 5x + 3 + (-15x - 12)(x-2) \\ R(x) &= -2x^2 + 5x + 3 - 15x^2 + 30x - 12x + 24 \\ R(x) &= -17x^2 + 23x + 27 \end{aligned}$$

4) Trois facteurs $S(x) = (2x+3)(x+2)(3x-7)$

   - Les deux premiers facteurs : $S(x) = (2x^2 + 4x + 3x + 6)(3x-7)$
   - On regroupe les termes : $S(x) = (2x^2 + 7x + 6)(3x-7)$
   - On distribue de nouveau : $S(x) = 6x^3 - 14x^2 + 21x^2 - 49x + 18x - 42$
   - On obtient alors : $S(x) = 6x^3 + 7x^2 - 31x - 42$

Remarque : Le développement des expressions algébriques demande de la méthode lorsqu'il y a plus de 2 termes.

3.2 Par une identité remarquable

Certaines expressions sont développées une fois pour toutes du fait d'un usage fréquent. On les appelle les *identités remarquables*. Les identités remarquables sont au nombre de trois pour le second degré.

Règle 5 : Soit deux réels a et b, on a les égalités suivantes :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Exemples : Application de ces trois identités remarquables

$$(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$
$$(5x-1)^2 = 25x^2 - 10x + 1$$
$$(7x-5)(7x+5) = 49x^2 - 25$$

Remarque : Les identités remarquables permettent de calculer plus vite. Leurs emplois sont fréquents, il est important de bien les connaître.

4 Factorisation des quantités algébriques

La factorisation est une opération qui permet de mettre une expression algébrique sous forme de produits de facteurs. C'est l'opération inverse du développement. Si le développement est toujours possible, la factorisation ne l'est pas toujours. Deux situations se rencontrent fréquemment : l'expression admet un facteur commun ou l'expression correspond à une identité remarquable.

4.1 Avec un facteur commun

Règle 6 : Lorsqu'une expression admet un facteur commun, elle est de la forme :

$$ab + ac$$

Elle se factorise en mettant « a » en facteur, c'est à dire :

$$ab + ac = a(b+c)$$

4.1.1 Un coefficient en facteur

Soit l'expression : $P(x) = 4x + 12$

- On met 4 en facteur : $P(x) = 4(x+3)$

4.1.2 Repérer que x est facteur commun

Soit l'expression $Q(x) = 5x^2 - 7x$

- On met x en facteur : $Q(x) = x(5x-7)$

4.1.3 Une expression algébrique comme facteur commun

Soit l'expression : $R(x) = (x-2)(x+4) - (x-2)(2x+1)$

- On met $(x-2)$ en facteur : $R(x) = (x-2)\left[(x+4) - (2x+1)\right]$
- On développe dans le crochet : $R(x) = (x-2)(x+4-2x-1)$
- On regroupe les termes : $R(x) = (x-2)(-x+3)$

4.1.4 Un facteur commun qui se cache dans un carré

Soit l'expression : $S(x) = (x+3)^2 - 7x(x+3)$

- On met $(x+3)$ en facteur : $S(x) = (x+3)\left[(x+3) - 7x\right]$
- On regroupe : $S(x) = (x+3)(-6x+3)$
- On peut factoriser par 3 le deuxième facteur, on obtient alors :

$$S(x) = 3(x+3)(-2x+1)$$

Remarque : Pour une raison d'esthétique, on a l'habitude de mettre le coefficient devant. Comme la multiplication est commutative que le 3 soit au milieu ou devant ne change rien au résultat.

4.1.5 Problème du "1"

Soit l'expression : $T(x) = 2(2x+1)(x+5) - (x+5)$

- On met $(x+5)$ en facteur. Comme dans le second terme, il n'y a qu'un facteur, on en fabrique un deuxième artificiellement : $x+5 = 1(x+5)$.
- On obtient alors : $T(x) = (x+5)\left[2(2x+1) - 1\right]$

$$T(x) = (x+5)(4x+2-1)$$
$$T(x) = (x+5)(4x+1)$$

4.1.6 Un facteur commun "caché"

Parfois le facteur commun n'est pas visible immédiatement. Il faut donc transformer l'expression, pour le mettre en évidence. Voici un exemple :

Soit l'expression : $U(x) = 3(4x-6)(2x+5) - (6x-9)(x+11)$

- Le premier terme se factorise par 2 et le second par 3, on obtient alors :

$$U(x) = 3 \times 2(2x-3)(2x+5) - 3(2x-3)(x+11)$$

- Un facteur commun $(2x-3)$ est ainsi mis en évidence :

$$U(x) = (2x-3)\left[6(2x+5) - 3(x+11)\right]$$
$$U(x) = (2x-3)(12x+30-3x-33)$$
$$U(x) = (2x-3)(9x-3)$$

On peut factoriser le deuxième facteur par 3 : $U(x) = 3(2x-3)(3x-1)$

4.1.7 Deux facteurs de signes opposés

Soit l'expression : $V(x) = (3x-1)(x-2) + x(2-x)$

- Les facteurs $(x-2)$ et $(2-x)$ sont opposés. On change le signe du deuxième en sortant le signe "$-$" à l'extérieur de la parenthèse, on a ainsi :

$$V(x) = (3x-1)(x-2) - x(x-2)$$

- On met $(x-2)$ en facteur : $V(x) = (x-2)(3x-1-x)$
- Soit : $V(x) = (x-2)(2x-1)$

4.2 Avec une identité remarquable

Règle 7 : Les identités remarquables qui permettent de développer permettent aussi de factoriser lorsqu'elle sont utilisées dans l'autre sens.

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) && \text{appelée différence de deux carrés} \\ a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 && \text{appelée carré parfait} \\ a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 && \text{appelée carré parfait} \end{aligned}$$

4.2.1 Différence de deux carrés

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 9 \\ P(x) &= x^2 - 3^2 \\ P(x) &= (x-3)(x+3) \end{aligned}$$

4.2.2 Une autre différence de deux carrés

$$\begin{aligned} Q(x) &= 9x^2 - 16 \\ Q(x) &= (3x)^2 - 4^2 \\ Q(x) &= (3x-4)(3x+4) \end{aligned}$$

4.2.3 Différence de deux expressions algébriques au carré

$$\begin{aligned} R(x) &= (2x-7)^2 - (x+3)^2 \\ R(x) &= [(2x-7) - (x+3)]\,[(2x-7) + (x+3)] \\ R(x) &= (2x-7-x-3)(2x-7+x+3) \\ R(x) &= (x-10)(3x-4) \end{aligned}$$

4.2.4 Un carré parfait

Soit l'expression $S(x) = 4x^2 + 12x + 9$

C'est un carré parfait, en effet $4x^2 = (2x)^2$ et $9 = 3^2$, on peut donc identifier $a = 2x$ et $b = 3$, on a donc bien $2ab = 2 \times 2x \times 3 = 12x$

$$S(x) = (2x+3)^2$$

4.2.5 Un autre carré parfait

Soit l'expression $T(x) = x^2 - 14x + 49$

C'est un carré parfait, $a = x$ et $b = 7$, on a donc bien $2ab = 2 \times x \times 7 = 14x$

$$T(x) = (x-7)^2$$

5 Équations se ramenant au premier degré

5.1 Équation produit

Règle 8 : Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

5.1.1 Un produit de facteur nul

Soit l'équation : $(x+2)(2x-9) = 0$

On a un produit de facteurs nul, donc :

$$\begin{aligned} x+2 &= 0 \quad \text{ou} \quad & 2x-9 &= 0 \\ x &= -2 \quad \text{ou} \quad & x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \left\{-2; \dfrac{9}{2}\right\}$

5.1.2 Une équation à factoriser

Parfois l'expression n'est pas factorisée. On factorise alors cette expression pour avoir un produit de facteurs nul.
Soit l'équation : $5x(x+3) - 7x^2 = 0$

On factorise par x : $x\,[5(x+3) - 7x] = 0$

$$x(5x + 15 - 7x) = 0$$

$$x(-2x + 15) = 0$$

On a un produit de facteurs nul, donc :

$$\begin{aligned} x &= 0 \quad \text{ou} \quad & -2x+15 &= 0 \\ & \quad\ \ \text{ou} \quad & x &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \left\{0; \dfrac{15}{2}\right\}$

5.1.3 Des produits de chaque côté

Soit l'équation : $(x-1)(2x+3) = (x-1)(x-6)$

On cherche à mettre tous les termes à gauche afin d'avoir un terme de droite nul, cette opération consiste donc à annuler le second terme. On cherche ensuite à factoriser :

$$\begin{aligned}(x-1)(2x+3)-(x-1)(x-6) &= 0\\ x-1)\left[(2x+3)-(x-6)\right] &= 0\\ (x-1)(2x+3-x+6) &= 0\\ (x-1)(x+9) &= 0\end{aligned}$$

On a produit nul :

$$\begin{aligned} x-1=0 \quad &\text{ou} \quad x+9=0\\ x=1 \quad &\text{ou} \quad x=-9\end{aligned}$$

On conclut par l'ensemble solution : $S = \{-9; 1\}$

5.2 Égalité de deux carrés

Règle 9 : Deux nombres au carré sont égaux si et seulement si ces nombres sont égaux ou opposés. C'est à dire que :

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \quad \text{ou} \quad a = -b$$

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(3x+1)^2 = 16$

$$(3x+1)^2 = 16 \quad \Leftrightarrow \quad (3x+1)^2 = 4^2$$

Égalité de deux carrés, donc :

$$\begin{aligned} 3x+1=4 \quad &\text{ou} \quad 3x+1=-4\\ 3x=3 \quad &\text{ou} \quad 3x=-5\\ x=1 \quad &\text{ou} \quad x=\frac{-5}{3}\end{aligned}$$

On obtient alors : $S = \left\{1; \dfrac{-5}{3}\right\}$

Remarque : Cette équation aurait pu être résolue par une factorisation, en effet :

$$\begin{aligned}(3x+1)^2 &= 16\\ (3x+1)^2-4^2 &= 0\\ (3x+1-4)(3x+1+4) &= 0\\ (3x-3)(3x+5) &= 0\end{aligned}$$

On retrouve alors les mêmes solutions : 1 et $-\dfrac{5}{3}$ en annulant chaque facteur.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(5x+2)^2 = (x+1)^2$

Deux carrés égaux donc :

$$\begin{aligned} 5x+2 &= x+1 & \text{ou} \quad 5x+2 &= -x-1 \\ 5x-x &= -2+1 & \text{ou} \quad 5x+x &= -2-1 \\ 4x &= -1 & \text{ou} \quad 6x &= -3 \\ x &= -\frac{1}{4} & \text{ou} \quad x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On obtient alors : $S = \left\{ -\frac{1}{4} ; -\frac{1}{2} \right\}$

Remarque : Cette équation aurait pu aussi être résolue par une factorisation, en effet :

$$\begin{aligned} (5x+2)^2 &= (x+1)^2 \\ (5x+2)^2 - (x+1)^2 &= 0 \\ (5x+2-x-1)(5x+2+x+1) &= 0 \\ (4x+1)(6x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Cette méthode exige une factorisation un peu plus difficile.

5.3 Équations rationnelles se ramenant au premier degré

Définition 3 : Une équation rationnelle est une équation qui possède un dénominateur où figure l'inconnue. Cette équation a un sens si et seulement si ce dénominateur ne s'annule pas.

5.3.1 Égalité de deux fractions

Résoudre l'équation : $\dfrac{4x-3}{x-1} = \dfrac{3}{2}$

Le dénominateur $x-1$ ne doit pas s'annuler. Nous appellerons la valeur qui annule ce dénominateur *valeur interdite*.

- La valeur interdite : $x-1=0$ soit pour $x=1$

Nous appellerons D_f l'ensemble de définition de cette équation. Nous avons donc :

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Cela signifie que toutes les valeurs réelles peuvent être solution de cette équation à l'exception de $x=1$. Pour résoudre cette équation, faisons un produit en croix. Cela donne :

$$\begin{aligned} 2(4x-3) &= 3(x-1) \\ 8x-6 &= 3x-3 \\ 8x-3x &= 6-3 \\ 5x &= 3 \\ x &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Cette valeur appartient à notre ensemble de définition, donc : $S = \left\{\dfrac{3}{5}\right\}$

5.3.2 Des solutions impossibles

Résoudre l'équation : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{x}{x-2} = -\dfrac{8}{(x-2)(x+2)}$

valeurs interdites $\quad x+2=0 \quad$ ou $\quad x-2=0$
soient les valeurs $\quad x=-2 \quad$ ou $\quad x=2$

On a donc comme ensemble de définition $\;D_f = \mathbb{R} - (-2;2)$

Mettons l'équation au même dénominateur

$$\frac{2(x-2)-x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{8}{(x-2)(x+2)}$$

Multiplions par le dénominateur commun $\;(x+2)(x-2)$:

$$\begin{aligned}
2(x-2)-x(x+2) &= -8\\
2x-4-x^2-2x &= -8\\
-x^2 &= -8+4\\
-x^2 &= -4\\
x^2 &= 4
\end{aligned}$$

Nous avons une égalité de deux carrés donc : $x=2 \quad$ ou $\quad x=-2$

Ces deux valeurs sont interdites, donc ne peuvent être solution. L'équation n'admet donc aucune solution.

$$S = \varnothing$$

6 Mise en équation

6.1 Introduction

Nous éprouvons des difficultés dans la mise en équation parce qu'intervient directement le travail de réflexion de la pensée vers les mathématiques. Il est tout à fait normal d'éprouver des difficultés, car si vous n'avez jamais été confronté à un travail de réflexion mathématique, il va vous falloir des points de repères que vous n'avez pas encore. Les premiers exercices sont simples et pourraient se résoudre arithmétiquement sans passer par l'algèbre, mais il est important de poser l'équation correspondante à la question. Le but n'est pas seulement de trouver la solution mais d'essayer de détailler pas à pas la résolution algébrique du problème. Dans le texte, vous avez une question qu'il faudra traduire avec une équation. Résoudre cette équation vous permettra de répondre à cette question.

6.2 Règles de bases

On peut diviser la mise en équation en quatre parties.

1) **Compréhension de l'énoncé.** Parfois il est utile de pouvoir visualiser le problème à l'aide de dessins, croquis, etc ... Il ne faut pas se censurer en se disant "je peux très bien penser sans faire de dessins". La visualisation permet un rapprochement concret du problème et rend la traduction mathématique plus facile.
2) **Choix de l'inconnue.** Une fois l'énoncé compris, il faut pour répondre à la question choisir l'inconnue. Parfois ce choix est évident, parfois plusieurs choix sont possibles. Il est alors important de définir en quelques mots la signification de l'inconnue.
3) **Mise en équation.** Une fois cette inconnue définie, l'étape de la mise en équation intervient. Parfois la traduction est simple, d'autres fois c'est un peu plus compliqué. Attention à pas projeter une idée préconçue qui n'existe pas dans le texte. Il faut s'en tenir uniquement à l'énoncé rien que l'énoncé.
4) **Résolution.** La dernière étape est la résolution de l'équation. Ne pas hésiter à simplifier l'équation avant de la résoudre. On conclut par une phrase en français.

6.3 Un exemple

Deux négociants ont 30 000 € et 100 000 €. Sachant que leur capital à chacun s'accroît chaque année de 5 000 €, au bout de combien de temps le capital du premier sera-t-il égal à la moitié du second ?

1) Les deux négociants voient leur capital augmenter tous les ans de la même somme. Au début le capital du premier est inférieur à la moitié du second. Le problème est donc possible.
2) On prend souvent, pour désigner l'inconnue, l'initiale de ce que l'on cherche. Ici, on cherche un nombre d'années, donc on prend pour inconnue n : le nombre d'années nécessaire
3) On peut poser l'équation suivante :
   $30\,000 + 5\,000\,n =$ augmentation du capital du 1$^{\text{er}}$ négociant
   $100\,000 + 5\,000\,n =$ augmentation du capital du 2$^{\text{ème}}$ négociant donc :
   $$30\,000 + 5\,000\,n = \frac{1}{2}(100\,000 + 5\,000\,n)$$
4) Résolution de l'équation : on multiplie par 2 l'équation :
   $$60\,000 + 10\,000\,n = 100\,000 + 5\,000\,n$$
   On divise par 1 000
   $$\begin{aligned} 60 + 10\,n &= 100 + 5\,n \\ 10n - 5\,n &= 100 - 60 \\ 5\,n &= 40 \\ n &= \frac{40}{5} = 8 \end{aligned}$$

Au bout de 8 ans, le capital du premier sera égal à la moitié du second.