Équations du premier degré

Définition

Équation : égalité qui n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) d'une quantité x appelée inconnue.

Une équation du **premier degré** est une équation où l'inconnue x n'apparaît qu'à la puissance 1.

Règles de base :

- On ne change pas une équation si l'on **ajoute ou retranche** un même nombre de chaque côté de l'égalité.
- On ne change pas une équation si l'on **multiplie ou divise** par un même nombre **non nul** chaque terme de l'égalité.

Développement

Une expression algébrique se développe en utilisant :

- La distributilité, pour tous a, b, c, d

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

- Une identité remarquable :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Problème

Un commerçant écoule 100 chemises démodées. Il en vend 43 au prix initial, puis 17 avec un rabais de 1 € et liquide le reste à 1,5 € l'unité. Sa recette est de 1 243 €. Quel est le prix initial d'une chemise ?

43	17	Reste 40
x	$x-1$	1,5

x : prix initial d'une chemise

$$43x + 17(x-1) + 40 \times 1,5 = 1\,243 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20$$

Résolution

On isole l'inconnue dans une équation du 1er degré, en développant ou en multipliant par de dénominateur commun si nécessaire. On obtient alors :

$$ax = b$$

- Si $a \neq 0$, une solution $x = \dfrac{b}{a}$ d'où $S = \left\{\dfrac{b}{a}\right\}$
- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, impossible d'où $S = \varnothing$.
- Si $a = 0$ et $b = 0$, toujours vrai d'où $S = \mathbb{R}$

Mise en équation

On peut diviser la mise en équation en quatre étapes.

- **Compréhension de l'énoncé.** Il est parfois utile pour comprendre de visualiser le problème.
- **Choix de l'inconnue.** Choisir l'inconnue et la définir clairement.
- **Mise en équation.** Traduire le texte et uniquement le texte à l'aide d'une égalité.
- **Résolution.** Ne pas hésiter à simplifier l'équation. On conclut par une phrase en français.

Équation produit

Lorsque l'équation est de degré supérieur à 1, on annule le second membre.

Si le premier membre peut se factoriser en facteurs du 1er degré, on applique l'intégrité de la multiplication :

$$ab = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \text{ ou } b = 0$$

En cas d'égalité de deux carrés, on applique la règle

$$a^2 = b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b \text{ ou } a = -b$$

Factorisation

On peut factoriser de deux façons :

- Par un facteur commun : $ab + ac = a(b+c)$
  Problème du "1" : $ab + a = a(b+1)$
- Une identité remarquable :
  — Une différence de deux carrés :
  $$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
  — par un carré parfait :
  $$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Équation quotient

Si l'inconnue apparaît au dénominateur :

- On détermine l'ensemble de définition D_f.
- En cas d'égalité de deux fractions on effectue un produit en croix.
- Sinon, on multiplie par le dénominateur commun.
- On résout l'équation en vérifiant que la ou les solutions appartiennent à l'ensemble de définition.

Exemples de résolution d'équations

- **Avec des parenthèses**

$$7(x+4)-3(x+2)=3(x-1)-(x+7) \;\Leftrightarrow\; 7x+28-3x-6=3x-3-x-7 \;\Leftrightarrow$$
$$7x-3x-3x+x=-28+6-3-7 \;\Leftrightarrow\; 2x=-32 \;\Leftrightarrow\; x=-16$$

On conclut par l'ensemble solution : $S=\{-16\}$

- **Avec des fractions**

$$\frac{x+2}{3}-\frac{3(x-2)}{4}=\frac{-7x+2}{12}+2 \;\overset{\times 12}{\Leftrightarrow}\; 4(x+2)-9(x-2)=-7x+2+24$$
$$4x+8-9x+18=-7x+2+24 \;\Leftrightarrow\; 4x-9x+7x=-8-18+2+24 \;\Leftrightarrow$$
$$2x=0 \;\Leftrightarrow\; x=0 \quad \text{d'où } S=\{0\}$$

Exemples de développement

- **Par la distributivité**

$$\begin{aligned} P(x) &= (2x+1)(-x+3)-3(5x+4)(x-2)\\ &= -2x^2+5x+3+(-15x-12)(x-2)\\ &= -2x^2+5x+3-15x^2+30x-12x+24\\ &= -17x^2+23x+27 \end{aligned}$$

- **Par une identité remarquable**

$$\begin{aligned} (2x+3)^2 &= 4x^2+12x+9\\ (5x-1)^2 &= 25x^2-10x+1\\ (7x-5)(7x+5) &= 49x^2-25 \end{aligned}$$

Exemples de factorisation

- **Par un facteur commun**

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x+4)-(x-2)(2x+1)=(x-2)\,[(x+4)-(2x+1)]\\ &= (x-2)(x+4-2x-1)=(x-2)(-x+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2(2x+1)(x+5)-(x+5)=(x+5)\,[2(2x+1)-1]\\ &= (x+5)(4x+2-1)=(x+5)(4x+1) \end{aligned}$$

- **Par une identité remarquable**

$$\begin{aligned} R(x) &= \overset{a^2}{(2x-7)^2} - \overset{b^2}{(x+3)^2} = \left[\,\overset{a}{(2x-7)} - \overset{b}{(x+3)}\,\right]\left[\,\overset{a}{(2x-7)} + \overset{b}{(x+3)}\,\right]\\ &= (2x-7-x-3)(2x-7+x+3)=(x-10)(3x-4) \end{aligned}$$

$$S(x)=\overset{a^2}{4x^2}+\overset{2ab}{12x}+\overset{b^2}{9}=(\overset{a}{2x}+\overset{b}{3})^2$$

Exemples d'équations produit et quotient

- **Équation produit**

On annule le second membre et l'on factorise :

$$(x-1)(2x+3)=(x-1)(x-6) \;\Leftrightarrow\; (x-1)(2x+3)-(x-1)(x-6)=0$$
$$(x-1)\,[(2x+3)-(x-6)]=0 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(2x+3-x+6)=0$$
$$(x-1)(x+9)=0 \;\Leftrightarrow\; x=1 \text{ ou } x=-9 \;\Leftrightarrow\; S=\{-9\,;\,1\}$$

- **Égalité de deux carrés**

$$(3x+1)^2=16 \;\Leftrightarrow\; 3x+1=4 \text{ ou } 3x+1=-4 \;\Leftrightarrow\; x=1 \text{ ou } x=-\frac{5}{3}$$
$$S=\left\{-\frac{5}{3}\,;\,1\right\}$$

- **Équation quotient**

$$\frac{4x-3}{x-1}=\frac{3}{2} \qquad D_f=\mathbb{R}-\{1\}$$

$x\in D_f$ produit en croix

$$2(4x-3)=3(x-1) \;\Leftrightarrow\; 8x-6=3x-3$$
$$8x-3x=6-3 \;\Leftrightarrow\; 5x=3 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{3}{5}\in D_f \quad \text{soit} \quad S=\left\{\frac{3}{5}\right\}$$