# Ordre. Les inéquations du 1er degré.

## Table des matières

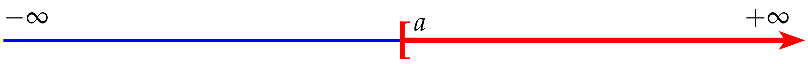
# 1 Intervalle dans R

On peut distinguer deux sortes d'intervalles dans l'ensemble $\mathbb{R}$ : une section commençante ou finissante et un encadrement. De plus, un intervalle pose la question de la frontière : la borne est-elle incluse ou excluse ?

## 1.1 Section commençante et section finissante

### 1.1.1 Section commençante : à partir de ...

Visualisons, sur la droite des réels, la proposition : $x \geqslant a$



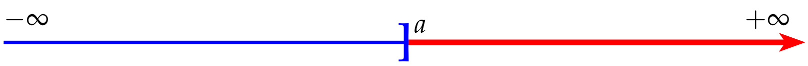

Les valeurs de $x$ qui correspondent à la proposition $x \geqslant a$ (en gras) sont tous les nombres réels à partir de $a$ inclus. L'ensemble des valeurs de $x$ va donc de $a$ inclus jusqu'à $+\infty$. On écrit alors :

$x \in [a\,,\,+\infty[$ "$x$ appartient à l'intervalle $a$ fermé, $+\infty$ "

**Remarque :** On ne précise jamais que $+\infty$ est ouvert car cela est toujours le cas.

On dit que le crochet devant $a$ est fermé (tourné vers l'intérieur de la zone en gras) car $a$ est inclus dans l'intervalle. En revanche le crochet devant $+\infty$ est ouvert (tourné vers l'extérieur) car $+\infty$ est exclus de l'intervalle. En effet $+\infty$ n'est pas un nombre réel.

Visualisons maintenant la proposition : $x > a$




Cette fois la valeur $a$ est à exclure car $x$ est strictement supérieur à $a$. Le crochet sera donc ouvert en $a$. On écrit donc :

$x \in ]a\,,\,+\infty[$ "$x$ appartient à l'intervalle $a$ ouvert, $+\infty$ "

**Définition 1 :** Les deux cas d'une section commençante sont :

$x \geqslant a$ qui revient à écrire $x \in [a\,,\,+\infty[$

$x > a$ qui revient à écrire $x \in ]a\,,\,+\infty[$

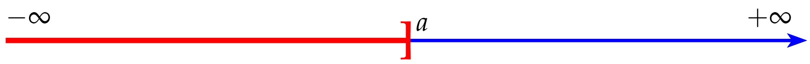
**Exemples :**

- La proposition $x \geqslant 9$ : $x \geqslant 9 \Leftrightarrow x \in [9\,,\,+\infty[$
- La proposition $x > -2$ : $x > -2 \Leftrightarrow x \in ]-2\,,\,+\infty[$

**Remarque :** Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie "est équivalent à"

### 1.1.2 Section finissante : jusqu'à ...

Visualisons la proposition : $x \leqslant a$

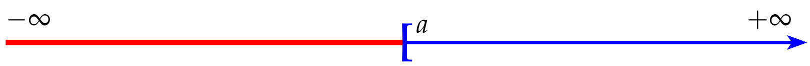



Les valeurs de $x$ qui correspondent à la proposition $x \leqslant a$ (en gras) sont tous les nombres réels jusqu'à $a$ inclus. L'ensemble des valeurs de $x$ va donc de $-\infty$ jusqu'à $a$ inclus. On écrit alors :

$$x \in ]-\infty\,;\,a] \qquad \text{"}x \text{ appartient à l'intervalle } -\infty, a \text{ fermé"}$$

On dit que le crochet devant $-\infty$ est ouvert (tourné vers l'extérieur) car $-\infty$ est exclus de l'intervalle. En effet $-\infty$ n'est pas un nombre réel. On dit que le crochet devant $a$ est fermé (tourné vers l'intérieur) car le nombre $a$ est inclus dans l'intervalle.

Visualisons maintenant la proposition : $x < a$




Cette fois la valeur $a$ est à exclure car $x$ est strictement inférieur à $a$. Le crochet sera donc ouvert en $a$. On écrit donc :

$$x \in ]-\infty\,;\,a[ \qquad \text{"}x \text{ appartient à l'intervalle } -\infty, a \text{ ouvert"}$$

**Définition 2 :** Les deux cas d'une section finissante sont :

$$x \leqslant a \quad \text{qui revient à écrire} \quad x \in ]-\infty\,;\,a]$$
$$x < a \quad \text{qui revient à écrire} \quad x \in ]-\infty\,;\,a[$$

**Exemple :**

- La proposition $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$ : $\quad x \leqslant -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{3}{2}\right]$
- La proposition $x < \sqrt{2}$ : $\quad x < \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,;\,\sqrt{2}\right[$

## 1.2 Encadrement dans R

Il y a quatre situations, dans le cas d'un encadrement, suivant que l'on prenne ou non les valeurs extrêmes.

1) Visualisons la proposition : $a \leqslant x \leqslant b$

Les valeurs de $x$ qui correspondent à la proposition $a \leqslant x \leqslant b$ (en gras) sont tous les nombres réels compris entre $a$ et $b$ inclus. On écrit alors :

$$x \in [a\,;\,b] \qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle fermé } a, b \text{ "}$$

2) Visualisons la proposition : $a < x < b$


Les valeurs de $x$ qui correspondent à $a < x < b$ (en gras) sont tous les nombres réels compris entre $a$ et $b$ cette fois exclus. On écrit alors :

$$x \in ]a\,;\,b[ \qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle ouvert } a, b \text{ "}$$

3) Visualisons la proposition : $a \leqslant x < b$


Les valeurs de $x$ qui correspondent à la proposition $a \leqslant x < b$ sont tous les nombres réels compris entre a inclus et b exclus. On écrira donc :

$$x \in [a\,;\,b[ \qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle } a \text{ fermé, } b \text{ ouvert "}$$

4) Visualisons enfin le dernier cas : $a < x \leqslant b$


Les valeurs de $x$ qui correspondent à la proposition $a < x \leqslant b$ sont tous les nombres réels compris entre a exclus et b inclus. On écrira donc :

$$x \in ]a\,;\,b] \qquad \text{" } x \text{ appartient à l'intervalle } a \text{ ouvert, } b \text{ fermé "}$$

**Définition 3 :** Les quatre cas d'encadrement correspondent aux situations suivantes :

| | | |
|---|---|---|
| $a \leqslant x \leqslant b$ | qui revient à écrire | $x \in [a\,;\,b]$ |
| $a < x < b$ | qui revient à écrire | $x \in ]a\,;\,b[$ |
| $a \leqslant x < b$ | qui revient à écrire | $x \in [a\,;\,b[$ |
| $a < x \leqslant b$ | qui revient à écrire | $x \in ]a\,;\,b]$ |

**Exemples :**

- La proposition $2 \leqslant x \leqslant 5$ : $\quad 2 \leqslant x \leqslant 5 \Leftrightarrow x \in [2\,;\,5]$
- La proposition $-7 < x < 3$ : $\quad -7 < x < 3 \Leftrightarrow x \in ]-7\,;\,3[$
- La proposition $\dfrac{3}{4} \leqslant x < \dfrac{10}{3}$ : $\quad \dfrac{3}{4} \leqslant x < \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{10}{3}\right[$
- La proposition $0 < x \leqslant \sqrt{3}$ : $\quad 0 < x \leqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left]0\,;\,\sqrt{3}\right]$

### 1.3 Union d'intervalles et intervalles particuliers

Lorsqu'un ensemble de nombre est composé de plusieurs parties, il est nécessaire de relier les différents intervalles qui le composent. Nous disposons alors d'un symbole $\cup$ qui signifie "*union*" pour écrire cet ensemble. Sa signification en français est "*ou*" dans un sens non exclusif.

**Exemple :** Soit l'ensemble défini par $x < 2$ ou $x \geqslant 5$

Il s'agit d'une section finissante et d'une section commençante.
Visualisons sur la droite des réel :


L'ensemble visualisé par la partie en gras s'écrit alors : $]-\infty\,;\,2\,[\,\cup\,[\,5\,;\,+\infty[$

Des ensembles particuliers, qui s'utilisent souvent, ont des notation particulières.

- $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ correspond à l'ensemble des réels privé du nombre 0. Il peut s'écrire :
$$\mathbb{R}^* = ]-\infty\,;\,0\,[\,\cup\,]\,0\,;\,+\infty[$$
- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ correspondent respectivement aux réels positifs ou nuls et aux réels négatifs ou nuls. Ils peuvent s'écrire :
$$\mathbb{R}_+ = [\,0\,;\,+\infty[ \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_- = ]-\infty\,;\,0\,]$$
- $\mathbb{R}^*_+$ ou $\mathbb{R}^*_-$ qui correspondent respectivement à :
$$\mathbb{R}^*_+ = ]\,0\,;\,+\infty[ \qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}^*_- = ]-\infty\,;\,0\,[$$

## 2 Inéquation du 1er degré dans R

### 2.1 Définition

**Définition 4 :** On appelle inéquation à une inconnue une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de cette inconnue, dont on se propose de déterminer les valeurs.

**Exemples :**
- Inéquations du 1<sup></sup>er degré : $x-3 < 5x+1$ et $5x-7 \geqslant 0$
- Inéquations du 2nd degré : $x^2-2x \leqslant 3$ et $(x+7)^2 > (x+1)(x+7)$

**Remarque :** On classe les inéquations, comme les équations suivant le degré de l'inconnue car la résolution dépend du degré de l'inconnue. Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'intervalle ou l'union d'intervalles des valeurs de l'inconnue qui vérifient celle-ci.

## 2.2 Règles de résolution

Comme pour l'équation du 1$^{er}$ degré, la résolution d'une équation du 1$^{er}$ degré se fait en deux étapes : isoler l'inconnue puis diviser lorsque cela est possible. On a ainsi les deux règles suivantes :

**Règle 1 :** On ne change pas une inéquation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'inégalité.

**Exemples :**

- D'après la règle 1, on peut isoler l'inconnue

$$\begin{aligned} 3x - 2 &\geqslant x + 5 \\ 3x - x &\geqslant 2 + 5 \\ 2x &\geqslant 7 \end{aligned}$$

- Toujours d'après la règle 1 :

$$\begin{aligned} x - 3 &< 5x + 1 \\ x - 5x &< 3 + 1 \\ -4x &< 4 \end{aligned}$$

**Règle 2 :** On ne change pas la relation d'ordre si l'on multiplie ou divise par un même nombre **positif** chaque côté de l'inéquation.
On **inverse** la relation d'ordre si l'on multiplie ou divise par un même nombre **négatif** chaque côté de l'inéquation.

**Remarque :** Cette règle marque une petite différence avec la résolution d'une équation car, suivant que l'on divise une inéquation par un nombre positif ou négatif, on laisse ou on inverse la relation d'ordre. Cette règle d'inversion est liée à la symétrie, par rapport à zéro, des nombres positifs et des nombres négatifs. En effet $2 < 5$ mais $-2 > -5$.

**Exemple :**

- Reprenons le 1$^{er}$ exemple donné avec la règle 1 : $2x \geqslant 7$

  On divise par 2 qui est positif, on laisse la relation d'ordre : $x \geqslant \dfrac{7}{2}$

  On conclut par l'intervalle solution : $S = \left[\dfrac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$

  ⚠ les deux erreurs classiques consistent à oublier d'inverser la relation d'ordre ou à oublier la solution sous forme d'intervalle

- Dans le 2$^{nd}$ exemple, on doit diviser par $-4$, on inverse alors la relation d'ordre, d'où :

$$-4x < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{4}{-4} \quad \Leftrightarrow \quad x > -1$$

  On conclut par l'intervalle solution : $S = ]-1\,;\,+\infty[$

## 2.3 Quelques exemples de résolution

### 2.3.1 Des parenthèses

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2(x-1)-3(x+1) > 4(3x-2)$

Comme pour les équations, on enlève les parenthèses puis on isole l'inconnue :

$$\begin{aligned} 2x-2-3x-3 &> 12x-8 \\ 2x-3x-12x &> 2+3-8 \\ -13x &> -3 \end{aligned}$$

On divise par $-13$ donc on change la relation d'ordre :

$$\begin{aligned} x &< \frac{-3}{-13} \\ x &< \frac{3}{13} \end{aligned}$$

On conclut par l'intervalle solution : $S = \left] -\infty\,; \frac{3}{13} \right[$

### 2.3.2 Des fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\dfrac{3x-1}{4} \leqslant \dfrac{5x+1}{6}$

On multiplie par le dénominateur commun, ici 12 :

$$\begin{aligned} 3(3x-1) &\leqslant 2(5x+1) \\ 9x-3 &\leqslant 10x+2 \\ 9x-10x &\leqslant 3+2 \\ -x &\leqslant 5 \\ x &\geqslant -5 \end{aligned}$$

**Remarque :** On a inversé la relation d'ordre car on a changé les signes de chaque côté de l'inéquation.

On conclut par l'intervalle solution : $S = [\,-5\,; +\infty\,[$

### 2.3.3 Des parenthèses et des fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{5}{3}(2x+1) - \dfrac{1}{2}(x-2) < \dfrac{7}{6}(x+2)$

On multiplie par le dénominateur commun, ici 6 :

$$\begin{aligned} 10(2x+1)-3(x-2) &< 7(x+2) \\ 20x+10-3x+6 &< 7x+14 \\ 20x-3x-7x &< -10-6+14 \\ 10x &< -2 \\ x &< \frac{-2}{10} \\ x &< -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

On conclut par l'intervalle solution : $S = \left] -\infty\,; -\frac{1}{5} \right[$

### 2.4 Inéquations particulières

Voici deux exemples d'inéquations impossibles ou toujours vraies.

**Exemples :**

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $-x + 4(x-1) \leqslant 3x$

   On isole l'inconnue : $-x + 4x - 4 \leqslant 3x \quad \Leftrightarrow \quad -x + 4x - 3x \leqslant 4$

   On s'aperçoit en regroupant les $x$ qu'il n'y en a plus. On convient comme pour les équations d'écrire $0x$, ce qui donne : $0x \leqslant 4$

   On a donc $0 \leqslant 4$, ce qui est toujours vrai, quelque soit les valeurs de $x$. On conclut alors par : $S = \mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $4(x-3) - (3x-10) > x + 5$

   On isole l'inconnue : $4x - 12 - 3x + 10 > x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3x - x > 12 - 10 + 5$

   On obtient alors : $0x > 7$

   On a donc $0 > 7$ ce qui est faux quelque soit les valeurs de $x$, on conclut donc par : $S = \varnothing$

**Remarque :** Beaucoup de cas de figure peuvent se présenter, dans les inéquations, où l'on obtient $0x$. Il faudra dans chaque cas réfléchir pour savoir si l'on se situe dans un cas toujours vrai (exemple 1) ou dans un cas impossible (exemple 2).

### 2.5 Résumé

**Règle 3 :** Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$ax \leqslant b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geqslant b \quad , \quad ax > b$$

- Si $a \neq 0$ on obtient soit une section finissante, soit une section commençante.
- Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible.

## 3 Signe du binôme $ax + b$

L'objet de ce paragraphe est de se préparer à la résolution d'inéquation se ramenant au 1er degré, soit par une factorisation, soit dans le cas d'inéquations rationnelles.

### 3.1 Règle pour déterminer le signe du binôme $ax + b$

On cherche à déterminer, lorsque $x$ varie sur l'ensemble $\mathbb{R}$, le signe de l'expression $ax + b$. Du fait de la règle n° 2, le signe va dépendre du signe du coefficient $a$.

### 3.1.1 Le coefficient $a$ est positif

Déterminons, suivant les valeurs de $x$, quand l'expression $ax + b$ est positive, nulle et négative.

$$ax + b > 0 \quad \text{soit} \quad ax > -b \quad \text{et donc} \quad x > -\frac{b}{a}$$

On remarquera que comme $a > 0$, on ne change pas la relation d'ordre lorsque l'on divise par $a$

$$ax + b = 0 \quad \text{soit} \quad ax = -b \quad \text{et donc} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \quad \text{soit} \quad ax < -b \quad \text{et donc} \quad x < -\frac{b}{a}$$

Nous pouvons alors résumer les résultats dans un tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax + b$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

**Remarque** : Lorsque $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'expression $ax + b$ est d'abord négative, nulle puis positive.

### 3.1.2 Le coefficient $a$ est négatif

Déterminons, suivant les valeurs de $x$, quand l'expression $ax + b$ est positive, nulle et négative.

$$ax + b > 0 \quad \text{soit} \quad ax > -b \quad \text{et donc} \quad x < -\frac{b}{a}$$

On remarquera que comme $a < 0$, on change la relation d'ordre lorsque l'on divise par $a$ :

$$ax + b = 0 \quad \text{soit} \quad ax = -b \quad \text{et donc} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \quad \text{soit} \quad ax < -b \quad \text{et donc} \quad x > -\frac{b}{a}$$

Nous pouvons alors résumer les résultats dans un tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax + b$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

**Remarque** : Lorsque $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, l'expression $ax + b$ est d'abord positive, nulle puis négative.

### 3.2 Exemples

Voici, à l'aide de deux exemples les deux cas de figures qui l'on vient de traiter.

1) Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe de $3x - 7$.

- On détermine ce qu'on appelle la *valeur frontière*, c'est à dire la valeur de $x$ qui annule la quantité $3x - 7$.

$$3x - 7 = 0 \quad \text{soit} \quad 3x = 7 \quad \text{donc} \quad x = \frac{7}{3}$$

- Comme $a = 3$, le coefficient est positif, la quantité est d'abord négative, nulle puis positive. On a donc le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{7}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x - 7$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

2) Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe de $-5x + 9$.

- On détermine la *valeur frontière*, c'est à dire la valeur de $x$ qui annule la quantité $-5x + 9$.

$$-5x + 9 = 0 \quad \text{soit} \quad -5x = -9 \quad \text{donc} \quad x = \frac{9}{5}$$

- Comme $a = -5$, le coefficient est négatif, donc la quantité est d'abord positive, nulle puis négative. On a donc le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{9}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-5x + 9$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

### 3.3 Résumé

Le signe du binôme $ax + b$ dépend du signe du coefficient $a$. Si $a > 0$, la quantité $ax + b$ sera d'abord négative (signe de $-a$), nulle puis positive (signe de $a$). Si $a < 0$, la quantité $ax + b$ sera d'abord positive (signe de $-a$), nulle puis négative (signe de $a$).
On peut ainsi résumé les deux cas de figure dans un tableau.

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax + b$ | | signe de $-a$ | 0 | signe de $a$ | |

## 4 Inéquations se ramenant au premier degré

### 4.1 Trois résolutions d'inéquations par une factorisation

1) Résoudre l'inéquation suivante : $(5x + 2)(3 - 2x) \geqslant 0$

Le problème revient à déterminer les valeurs de $x$ pour lesquelles un produit de facteurs est positif ou nul. Si on se réfère à la règle des signes, le produit est positif si et seulement si les deux facteurs sont du même signe (soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs).

⚠ Le fait que les deux facteurs soient positifs entraîne bien que le produit soit positif, mais ce n'est pas la seule solution. Les deux facteurs négatifs ($-$ par $-$) entraînent aussi un produit positif.

Nous sommes donc amenés à résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x + 2 \geqslant 0 \\ 3 - 2x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5x + 2 \leqslant 0 \\ 3 - 2x \leqslant 0 \end{cases}$$

Nous pourrions alors résoudre ces deux systèmes et nous aurions alors la solution à notre inéquation mais cela est un peu fastidieux. Nous pouvons penser notre problème autrement. Au lieu de nous préoccuper tout de suite du signe positif de notre produit, nous allons nous poser la question : "Quel est le signe du produit suivant les valeurs de $x$ ?". Ensuite nous ne retiendrons que les valeurs de $x$ qui rendent notre produit positif ou nul. La méthode consiste donc à superposer deux tableaux correspondants aux signes des quantités $5x + 2$ et $3 - 2x$ puis d'appliquer la règle des signes afin d'obtenir celui du produit.

a) On détermine les valeurs qui annulent le produit, c'est à dire les valeurs frontières :

$$5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) On remplit le tableau suivant :
- On place les valeurs frontières en les ordonnant de la plus petite à la plus grande.
- On place ensuite les "0".
- On remplit les signes de la ligne de $5x + 2$ en utilisant la règle du signe du binôme. On a d'abord $-$ puis 0 puis $+$ car le coefficient $a = 5$ est positif.
- On remplit les signes de la ligne de $3 - 2x$ en utilisant la règle du signe du binôme. On a d'abord $+$ puis 0 puis $-$ car le coefficient $a = -2$ est négatif.
- Pour remplir la dernière ligne, on détermine les signes en appliquant la règle des signes verticalement (les deux signes qui sont au-dessus).

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{2}{5}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $5x+2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $3-2x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(5x+2)(3-2x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

Il ne nous reste plus qu'à choisir les valeurs de $x$ pour lesquelles notre produit $(5x + 2)(3 - 2x)$ est positif ou nul. En regardant la dernière ligne du tableau puis en se reportant à la première pour trouver les valeurs de $x$ correspondantes, on observe :

$$(5x+2)(3-2x) \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$$

On conclut par : $S = \left[-\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{2}\right]$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$

L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

a) On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3) < 0$$

b) On factorise par $(x-5)$ :

$$\begin{aligned} (x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right] &< 0 \\ (x-5)(x-2-2x+3) &< 0 \\ (x-5)(-x+1) &< 0 \end{aligned}$$

Nous sommes revenus à la forme factorisée de l'exemple précédent. On remplit alors un tableau de signes en ayant pris soin auparavant de calculer les valeurs frontières.

c) Valeurs frontières :

$$x-5=0 \;\Leftrightarrow\; x=5 \qquad \text{et} \qquad -x+1=0 \;\Leftrightarrow\; -x=-1 \;\Leftrightarrow\; x=1$$

d) On a le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $-x+1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | |
| $(x-5)(-x+1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

e) En conclusion pour que le produit soit strictement négatif, nous avons deux possibilités :

$$x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5$$

La solution est donc : $S = ]-\infty\,;\,1\,[\,\cup\,]\,5\,;\,+\infty\,[$

3) Résoudre suivante : $(3x-2)^2 > (x-1)^2$

⚠ On pourrait être tenté de supprimer les carrés de chaque côté de la relation d'ordre, c'est à dire d'écrire $3x-2 > x-1$. On obtiendrait une partie de la solution, mais pas toute la solution. En supprimant les carrés, on change l'énoncé. On procédera donc de la même manière que l'exemple précédent.

a) On annule le second terme, on a donc : $(3x-2)^2-(x-1)^2 > 0$

b) On factorise la différence de deux carrés :

$$\begin{aligned}[(3x-2)-(x-1)]\,[(3x-2)+(x-1)] &> 0\\ (3x-2-x+1)(3x-2+x-1) &> 0\\ (2x-1)(4x-3) &> 0\end{aligned}$$

c) On cherche les valeurs frontières :

$$2x-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad 4x-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{3}{4}$$

d) On a le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{4}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | | $-$ | 0 | $+$ | \| | $+$ | |
| $4x-3$ | | $-$ | \| | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(2x-1)(4x-3)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

e) En conclusion pour que le produit soit strictement positif, nous avons deux possibilités :

$$x < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > \frac{3}{4}$$

La solution est donc : $S = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{3}{4}\,;\,+\infty\right[$

## 4.2 Deux inéquations rationnelles se ramenant au premier degré

1) Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{8-2x}{x+5} \geqslant 0$

Avant de commencer à résoudre, il faut déterminer l'ensemble de définition, c'est à dire les valeurs de $x$ pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites, c'est à dire les valeurs de $x$ qui annulent le dénominateur.

a) Valeur interdite et ensemble de définition :
Le dénominateur est nul si $\quad x+5=0 \quad$ soit $\quad x=-5$
On a donc l'ensemble de définition $D$ suivant : $D=\mathbb{R}-\{-5\}$

b) Le signe du quotient sur l'ensemble de définition est le même que celui du produit. On cherche donc les valeurs frontières.

$$8-2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=4 \qquad \text{et} \qquad x+5=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-5$$

c) Par convention une valeur interdite, ici $x=5$, se note dans un tableau de signes par une double barre. On a alors le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $8-2x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+5$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $\dfrac{8-2x}{x+5}$ | | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

d) En conclusion pour que le quotient soit positif ou nul, on a donc :
$-5 < x \leqslant 4$

La solution est donc : $S = ]-5\,;\,4\,]$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, comme le second terme n'est pas nul, il faut donc l'annuler. On réduit ensuite au même dénominateur de façon à n'avoir qu'une seule fraction.

a) Valeur interdite et ensemble de définition :
Le dénominateur est nul si $\quad x+1=0 \quad$ soit $\quad x=-1$

On a donc l'ensemble de définition $D$ suivant : $D = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4-3x-3}{x+1} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-3x+1}{x+1} \leqslant 0$$

c) On cherche les valeurs frontières :

$$-3x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad x+1=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1$$

d) On a donc le tableau suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $\frac{1}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x+1$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $\dfrac{-3x+1}{x+1}$ | | $-$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | |

e) En conclusion pour que le quotient soit négatif ou nul, on a donc :

$$x < -1 \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{1}{3}$$

La solution est donc : $S = \left]-\infty\,;\,-1\right[ \cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$