Ordre. Les inéquations du 1er degré.

Table des matières

1 Intervalle dans R

On distingue deux sortes d'intervalles dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

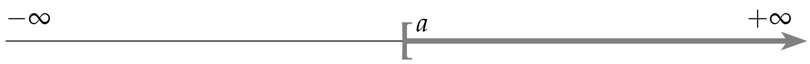
- une section commençante ou finissante
- un encadrement.

Un intervalle pose la question de la frontière : la borne est-elle incluse ou excluse ?

1.1 Section commençante et section finissante

1.1.1 Section commençante : à partir de ...

Visualisons, sur la droite des réels, la proposition : $x \geqslant a$



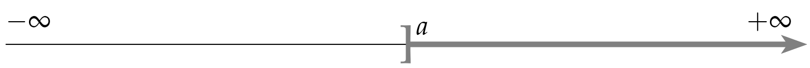
Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $x \geqslant a$ (en gras) sont tous les nombres réels à partir de a inclus. Les valeurs de x vont donc de a inclus à $+\infty$.

On écrit : $x \in [a\,,\,+\infty[$ « x appartient à l'intervalle a fermé, $+\infty$ »

Remarque : On ne précise jamais que $+\infty$ est ouvert car cela est toujours le cas.

On dit que le crochet devant a est **fermé** (tourné vers l'intérieur de la zone en gras) car a est inclus dans l'intervalle. En revanche le crochet devant $+\infty$ est **ouvert** (tourné vers l'extérieur) car $+\infty$ est exclus de l'intervalle.
En effet $+\infty$ n'est pas un nombre réel.

Visualisons maintenant la proposition : $x > a$



Cette fois la valeur a est à exclure car x est strictement supérieur à a. Le crochet sera donc ouvert en a.

On écrit : $x \in]a\,,\,+\infty[$ « x appartient à l'intervalle a ouvert, $+\infty$ »

Définition 1 : Les deux cas d'une section commençante sont :

- $x \geqslant a$ qui revient à écrire $x \in [a\,,\,+\infty[$
- $x > a$ qui revient à écrire $x \in]a\,,\,+\infty[$

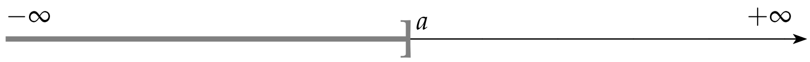
Exemples :

- La proposition $x \geqslant 9$: $x \geqslant 9 \Leftrightarrow x \in [9\,,\,+\infty[$
- La proposition $x > -2$: $x > -2 \Leftrightarrow x \in]-2\,,\,+\infty[$

Remarque : Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie "est équivalent à"

1.1.2 Section finissante : jusqu'à ...

Visualisons la proposition : $x \leqslant a$

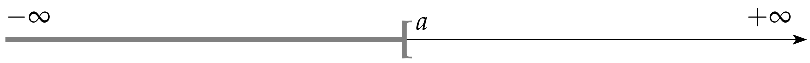


Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $x \leqslant a$ (en gras) sont tous les nombres réels jusqu'à a inclus. Les valeurs de x vont de $-\infty$ jusqu'à a inclus.

On écrit : $x \in \,]-\infty\,; a]$ « x appartient à l'intervalle $-\infty$, a fermé »

On dit que le crochet devant $-\infty$ est ouvert (tourné vers l'extérieur) car $-\infty$ est exclus de l'intervalle. En effet $-\infty$ n'est pas un nombre réel. On dit que le crochet devant a est fermé (tourné vers l'intérieur) car le nombre a est inclus dans l'intervalle.

Visualisons maintenant la proposition : $x < a$



Cette fois la valeur a est à exclure car x est strictement inférieur à a. Le crochet sera donc ouvert en a.

On écrit : $x \in \,]-\infty\,; a[$ « x appartient à l'intervalle $-\infty$, a ouvert »

Définition 2 : Les deux cas d'une section finissante sont :
- $x \leqslant a$ qui revient à écrire $x \in \,]-\infty\,; a]$
- $x < a$ qui revient à écrire $x \in \,]-\infty\,; a[$

Exemple :

- La proposition $x \leqslant -\dfrac{3}{2}$: $\quad x \leqslant -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,; -\dfrac{3}{2}\right]$
- La proposition $x < \sqrt{2}$: $\quad x < \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,; \sqrt{2}\right[$

1.2 Encadrement dans R

Il y a quatre situations, dans le cas d'un encadrement, suivant que l'on prenne ou non les valeurs extrêmes.

1) Visualisons la proposition : $a \leqslant x \leqslant b$

Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $a \leqslant x \leqslant b$ (en gras) sont tous les nombres réels compris entre a et b inclus.

On écrit : $x \in [a\,; b]$ « x appartient à l'intervalle fermé a, b »

2) Visualisons la proposition : $a < x < b$

Les valeurs de x qui correspondent à $a < x < b$ (en gras) sont tous les nombres réels compris entre a et b cette fois exclus.

On écrit : $x \in]a\,;\,b[$ « x appartient à l'intervalle ouvert a, b »

3) Visualisons la proposition : $a \leqslant x < b$

Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $a \leqslant x < b$ sont tous les nombres réels compris entre a inclus et b exclus.

On écrit : $x \in [a\,;\,b[$ « x appartient à l'intervalle a fermé, b ouvert »

4) Visualisons enfin le dernier cas : $a < x \leqslant b$

Les valeurs de x qui correspondent à la proposition $a < x \leqslant b$ sont tous les nombres réels compris entre a exclus et b inclus.

On écrit : $x \in]a\,;\,b]$ « x appartient à l'intervalle a ouvert, b fermé »

Définition 3 : Les quatre cas d'encadrement correspondent à :

- $a \leqslant x \leqslant b$ qui revient à écrire $x \in [a\,;\,b]$
- $a < x < b$ qui revient à écrire $x \in]a\,;\,b[$
- $a \leqslant x < b$ qui revient à écrire $x \in [a\,;\,b[$
- $a < x \leqslant b$ qui revient à écrire $x \in]a\,;\,b]$

Exemples :

- La proposition $2 \leqslant x \leqslant 5$: $2 \leqslant x \leqslant 5 \Leftrightarrow x \in [2\,;\,5]$
- La proposition $-7 < x < 3$: $-7 < x < 3 \Leftrightarrow x \in]-7\,;\,3[$
- La proposition $\dfrac{3}{4} \leqslant x < \dfrac{10}{3}$: $\dfrac{3}{4} \leqslant x < \dfrac{10}{3} \Leftrightarrow x \in \left[\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{10}{3}\right[$
- La proposition $0 < x \leqslant \sqrt{3}$: $0 < x \leqslant \sqrt{3} \Leftrightarrow x \in \left]0\,;\,\sqrt{3}\right]$

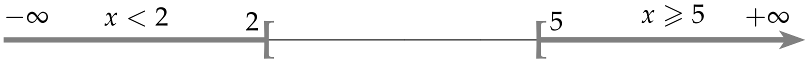
1.3 Union d'intervalles et intervalles particuliers

Si un ensemble de réels est composé de plusieurs parties, il est nécessaire de relier les différents intervalles qui le composent à l'aide du symbole $\cup$: « union »

La signification en français de $\cup$ est « ou » dans un sens non exclusif.

Exemple : Soit l'ensemble défini par $x < 2$ ou $x \geqslant 5$

Il s'agit d'une section finissante et d'une section commençante.
Visualisons sur la droite des réel :



L'ensemble visualisé par la partie en gras s'écrit alors : $]-\infty\,;\,2\,[\,\cup\,[\,5\,;\,+\infty[$

Des ensembles particuliers, qui s'utilisent souvent, ont des notation particulières.

- $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ correspond à l'ensemble des réels privé du nombre 0.
$$\mathbb{R}^* =]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;\,+\infty[$$
- $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$ correspondent aux réels positifs ou nuls et négatifs ou nuls.
$$\mathbb{R}_+ = [0\,;\,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_- =]-\infty\,;\,0]$$
- $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ qui correspondent à :
$$\mathbb{R}_+^* =]0\,;,+\infty[\qquad \text{et} \qquad \mathbb{R}_-^* =]-\infty\,;\,0[$$

2 Inéquation du 1er degré dans R

2.1 Définition

Définition 4 : On appelle inéquation à une inconnue, une inégalité qui n'est vérifiée que pour certaines valeurs de cette inconnue, dont on se propose de déterminer les valeurs.

Exemples :

- Inéquations du 1^er^ degré : $x - 3 < 5x + 1$ et $5x - 7 \geqslant 0$
- Inéquations du 2^nd^ degré : $x^2 - 2x \leqslant 3$ et $(x+7)^2 > (x+1)(x+7)$

Remarque : On classe les inéquations, comme les équations suivant le degré de l'inconnue car la résolution est différente selon le degré. Résoudre une inéquation dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer l'intervalle ou l'union d'intervalles des valeurs de l'inconnue qui vérifient celle-ci.

2.2 Règles de résolution

Comme pour l'équation du 1^er^ degré, la résolution d'une équation du 1^er^ degré se fait en deux étapes : isoler l'inconnue puis diviser lorsque cela est possible.
On a les deux règles suivantes :

Règle 1 : On ne change pas une inéquation si l'on ajoute ou retranche un même nombre de chaque côté de l'inégalité.

Exemples :

- D'après la règle 20, on peut isoler l'inconnue
$$3x - 2 \geqslant x + 5$$
$$3x - x \geqslant 2 + 5$$
$$2x \geqslant 7$$

- Toujours d'après la règle 20 :

$$\begin{aligned} x-3 &< 5x+1 \\ x-5x &< 3+1 \\ -4x &< 4 \end{aligned}$$

Règle 2 : On **ne change pas** l'inégalité si l'on multiplie ou divise par un même nombre **positif** chaque côté de l'inéquation.
On **inverse** l'inégalité si l'on multiplie ou divise par un même nombre **négatif** chaque côté de l'inéquation.

Remarque : Cette règle marque une petite différence avec la résolution d'une équation car, suivant que l'on divise une inéquation par un nombre positif ou négatif, on laisse ou on inverse l'inégalité.
Cette règle d'inversion est liée à la symétrie, par rapport à zéro, des nombres positifs et des nombres négatifs. En effet $2 < 5$ mais $-2 > -5$.

Exemple :

- Reprenons le 1er exemple donné avec la règle 20 : $2x \geqslant 7$

  On divise par 2 qui est positif, on laisse l'inégalité : $x \geqslant \dfrac{7}{2}$

  On conclut par l'intervalle solution : $S = \left[\dfrac{7}{2}\,;\,+\infty\right[$

- Dans le 2e exemple, on doit diviser par -4, on inverse alors l'inégalité :

$$-4x < 4 \quad\Leftrightarrow\quad x > \frac{4}{-4} \quad\Leftrightarrow\quad x > -1$$

  On conclut par l'intervalle solution : $S =]-1\,;\,+\infty[$

⚠ Ne pas oublier d'inverser l'inégalité ou la solution sous forme d'intervalle.

2.3 Quelques exemples de résolution

2.3.1 Des parenthèses

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2(x-1)-3(x+1) > 4(3x-2)$

Comme pour les équations, on enlève les parenthèses puis on isole l'inconnue :

$$\begin{aligned} 2x-2-3x-3 &> 12x-8 \\ 2x-3x-12x &> 2+3-8 \\ -13x &> -3 \end{aligned}$$

On divise par -13 donc on inverse l'inégalité :

$$x < \frac{-3}{-13} \;\Leftrightarrow\; x < \frac{3}{13}$$

On conclut par l'intervalle solution : $S = \left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{13}\right[$

2.3.2 Des fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante : $\dfrac{3x-1}{4} \leqslant \dfrac{5x+1}{6}$

On multiplie par le dénominateur commun, ici 12 :

$$3(3x-1) \leqslant 2(5x+1)$$
$$9x-3 \leqslant 10x+2$$
$$9x-10x \leqslant 3+2$$
$$-x \leqslant 5 \overset{\times(-1)}{\Leftrightarrow} x \geqslant -5$$

Remarque : On a inversé l'inégalité car on a changé les signes de chaque côté.

On conclut par l'intervalle solution : $S = [\,-5\,;\,+\infty\,[$

2.3.3 Des parenthèses et des fractions

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\dfrac{5}{3}(2x+1) - \dfrac{1}{2}(x-2) < \dfrac{7}{6}(x+2)$

On multiplie par le dénominateur commun, ici 6 :

$$10(2x+1) - 3(x-2) < 7(x+2)$$
$$20x+10-3x+6 < 7x+14$$
$$20x-3x-7x < -10-6+14$$
$$10x < -2$$
$$x < \frac{-2}{10} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5}$$

On conclut par l'intervalle solution : $S = \left]-\infty\,; -\dfrac{1}{5}\right[$

2.4 Inéquations particulières

Voici deux exemples d'inéquations impossibles ou toujours vraies.

Exemples :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $-x+4(x-1) \leqslant 3x$

   On isole l'inconnue : $-x+4x-4 \leqslant 3x \quad \Leftrightarrow \quad -x+4x-3x \leqslant 4$

   En réduisant les x, il n'y en a plus. On convient d'écrire : $0x \leqslant 4$

   On a donc $0 \leqslant 4$, toujours vrai, quelque soit les valeurs de x.

   On conclut alors par : $S = \mathbb{R}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $4(x-3)-(3x-10) > x+5$

   On isole l'inconnue : $4x-12-3x+10 > x+5 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-3x-x > 12-10+5$

   On obtient alors : $0x > 7$

   On a donc $0 > 7$ qui est faux quelque soit les valeurs de x.

   On conclut donc par : $S = \varnothing$

Remarque : Beaucoup de cas de figure peuvent se présenter, dans les inéquations, où l'on obtient $0x$. Il faudra dans chaque cas réfléchir pour savoir si l'on se situe dans un cas toujours vrai (ex. 1) ou dans un cas impossible (ex. 2).

2.5 Résumé

Règle 3 : Toute inéquation du premier degré peut se mettre sous l'une des formes suivantes :

$$ax \leqslant b \quad , \quad ax < b \quad , \quad ax \geqslant b \quad , \quad ax > b$$

- Si $a \neq 0$ soit une section finissante, soit une section commençante.
- Si $a = 0$ l'inéquation est soit toujours vraie, soit impossible.

3 Signe du binôme $ax + b$

L'objet de ce paragraphe est de se préparer à la résolution d'inéquation se ramenant au 1er degré, soit une inéquation produit, soit une inéquation quotient.

3.1 Règle pour déterminer le signe du binôme $ax + b$

On cherche à déterminer, lorsque x varie sur $\mathbb{R}$, le signe de l'expression $ax + b$. Du fait de la règle 21, le signe va dépendre du signe du coefficient a.

3.1.1 Le coefficient a est positif

Déterminons, suivant les valeurs de x, le signe de $ax + b$:

$$ax + b > 0 \quad \text{soit} \quad ax > -b \quad \text{et donc} \quad x > -\frac{b}{a}$$

Comme $a > 0$, on ne change pas l'inégalité lorsque l'on divise par a

$$ax + b = 0 \quad \text{soit} \quad ax = -b \quad \text{et donc} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \quad \text{soit} \quad ax < -b \quad \text{et donc} \quad x < -\frac{b}{a}$$

Nous pouvons alors résumer les résultats dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		$-$	0	$+$	

Remarque : De $-\infty$ à $+\infty$, l'expression $ax + b$ est négative, nulle puis positive.

3.1.2 Le coefficient a est négatif

Déterminons, suivant les valeurs de x, le signe de $ax + b$.

$$ax + b > 0 \quad \text{soit} \quad ax > -b \quad \text{et donc} \quad x < -\frac{b}{a}$$

Comme $a < 0$, on change l'inégalité lorsque l'on divise par a :

$$ax + b = 0 \quad \text{soit} \quad ax = -b \quad \text{et donc} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$ax + b < 0 \quad \text{soit} \quad ax < -b \quad \text{et donc} \quad x > -\frac{b}{a}$$

Nous pouvons alors résumer les résultats dans un tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		$+$	0	$-$	

Remarque : De $-\infty$ à $+\infty$, l'expression $ax+b$ est positive, nulle puis négative.

3.2 Exemples

Voici, à l'aide de deux exemples les deux cas de figures qui l'on vient de traiter.

1) Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe de $3x-7$.

- On détermine la **valeur frontière**, qui annule la quantité $3x-7$.

$$3x-7=0 \quad \text{soit} \quad 3x=7 \quad \text{donc} \quad x=\frac{7}{3}$$

- $a=3>0$, la quantité est négative, nulle puis positive.
  On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\dfrac{7}{3}$		$+\infty$
$3x-7$		$-$	0	$+$	

2) Déterminer, à l'aide d'un tableau, le signe de $-5x+9$.

- On détermine la **valeur frontière** qui annule la quantité $-5x+9$.

$$-5x+9=0 \quad \text{soit} \quad -5x=-9 \quad \text{donc} \quad x=\frac{9}{5}$$

- $a=-5<0$, la quantité est positive, nulle puis négative.
  On a donc le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\dfrac{9}{5}$		$+\infty$
$-5x+9$		$+$	0	$-$	

3.3 Résumé

Le signe du binôme $ax+b$ dépend du signe du coefficient a.

- Si $a>0$, $ax+b$ est négatif (signe de $-a$), nul puis positif (signe de a).
- Si $a<0$, $ax+b$ est positif (signe de $-a$), nul puis négatif (signe de a).

On peut ainsi résumé les deux cas de figure dans un tableau.

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

4 Inéquations se ramenant au premier degré

4.1 Trois résolutions d'inéquations par une factorisation

1) Résoudre l'inéquation suivante : $(5x+2)(3-2x) \geqslant 0$

Le problème revient à déterminer les valeurs de x pour lesquelles un produit de facteurs est positif ou nul. Si on se réfère à la règle des signes, le produit est positif si et seulement si les deux facteurs sont du même signe (soit tous les deux positifs, soit tous les deux négatifs).

⚠ Les deux facteurs positifs entraîne bien un produit positif, mais **ce n'est pas l'unique solution**. Deux facteurs négatifs ($-$ par $-$) entraînent aussi un produit positif.

Il faut donc résoudre les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 5x+2 \geqslant 0 \\ 3-2x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 5x+2 \leqslant 0 \\ 3-2x \leqslant 0 \end{cases}$$

On peut résoudre ces deux systèmes et avoir la solution mais cela devient vite fastidieux avec le nombre des facteurs. Il faut penser le problème autrement.

Avant de se préoccuper du signe positif du produit, on va se poser la question :

« Quel est le signe du produit suivant les valeurs de x ? ».

Ensuite on ne retiendra que les valeurs de x qui rendent le produit positif ou nul. La méthode consiste donc à superposer deux tableaux correspondants aux signes des quantités $(5x+2)$ et $(3-2x)$ puis d'appliquer la règle des signes afin d'obtenir celui du produit.

a) On détermine les valeurs qui annulent le produit : les valeurs frontières

$$5x+2=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\frac{2}{5} \quad \text{et} \quad 3-2x=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{3}{2}$$

b) Pour remplir le tableau :

- On place les valeurs frontières de la plus petite à la plus grande.
- On place ensuite les « 0 ».
- On remplit les signes de la ligne de $5x+2$ avec le signe du binôme.
  On a d'abord $-$ puis 0 puis $+$ car le coefficient $a=5$ est positif.
- On remplit les signes de la ligne de $3-2x$ avec signe du binôme.
  On a d'abord $+$ puis 0 puis $-$ car le coefficient $a=-2$ est négatif.
- Pour remplir la dernière ligne, on détermine les signes en appliquant la règle des signes verticalement (les deux signes qui sont au-dessus).

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$(5x+2)(3-2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On choisit les valeurs de x pour lesquelles $(5x+2)(3-2x)$ est positif ou nul. D'après la dernière ligne du tableau puis en se reportant à la première pour trouver les valeurs de x correspondantes, on a :

$$(5x+2)(3-2x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{5} ; \frac{3}{2}\right]$$

On conclut par : $S = \left[-\frac{2}{5} ; \frac{3}{2}\right]$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $(x-5)(x-2) < (x-5)(2x-3)$

L'inéquation n'est pas de 1er degré et le second terme de l'inéquation n'est pas nul. Il faut pouvoir revenir à une forme factorisée avec un second terme nul.

a) On annule le second terme. L'inéquation devient alors :

$$(x-5)(x-2)-(x-5)(2x-3) < 0$$

b) On factorise par $(x-5)$:

$$\begin{aligned} (x-5)\left[(x-2)-(2x-3)\right] &< 0 \\ (x-5)(x-2-2x+3) &< 0 \\ (x-5)(-x+1) &< 0 \end{aligned}$$

On obtient une forme comme à l'exemple précédent. On remplit un tableau de signes en calculant auparavant les valeurs frontières.

c) Valeurs frontières :

$$x-5=0 \Leftrightarrow x=5 \quad \text{et} \quad -x+1=0 \Leftrightarrow -x=-1 \Leftrightarrow x=1$$

d) On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$-x+1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$(x-5)(-x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

e) Pour que le produit soit strictement négatif, on a deux possibilités :

$$x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5$$

La solution est donc : $S =]-\infty ; 1[\cup]5 ; , +\infty[$

3) Résoudre suivante : $(3x-2)^2 > (x-1)^2$

⚠ Ne pas supprimer les carrés, car comme la fonction carrée n'est pas monotone, l'inéquation n'est pas équivalente à $3x-2 > x-1$.

a) On annule le second terme, on a donc : $(3x-2)^2-(x-1)^2 > 0$

b) On factorise comme une différence de deux carrés :

$$\begin{aligned} \left[(3x-2)-(x-1)\right]\left[(3x-2)+(x-1)\right] &> 0 \\ (3x-2-x+1)(3x-2+x-1) &> 0 \\ (2x-1)(4x-3) &> 0 \end{aligned}$$

c) On détermine les valeurs frontières :

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

d) On remplit le tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x-3$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(2x-1)(4x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

e) Pour que le produit soit strictement positif, on a deux possibilités :

$$x < \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > \frac{3}{4}$$

La solution est donc : $S = \left] -\infty\,; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{3}{4}\,; +\infty \right[$

4.2 Deux inéquations rationnelles se ramenant au premier degré

1) Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{8-2x}{x+5} \geqslant 0$

Avant de commencer à résoudre, on détermine l'ensemble de définition, c'est à dire les valeurs de x pour lesquelles le quotient existe. Cela revient à déterminer la ou les valeurs interdites.

a) Valeur interdite et ensemble de définition :
Le dénominateur est nul si $x + 5 = 0$ soit $x = -5$
D'où l'ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R} - \{-5\}$

b) Le signe du quotient sur l'ensemble de définition est le même que celui du produit. On cherche donc les valeurs frontières.

$$8 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 4 \qquad \text{et} \qquad x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$$

c) Par convention une valeur interdite, ici $x = 5$, se note dans un tableau de signes par une **double barre**. On a alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-5		4		$+\infty$
$8-2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$x+5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\dfrac{8-2x}{x+5}$		$-$	||	$+$	0	$-$	

d) Pour que le quotient soit positif ou nul, il faut que : $-5 < x \leqslant 4$

La solution est donc : $S =]-5\,;4]$

2) Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{4}{x+1} \leqslant 3$

⚠ Pas de produit en croix comme avec les équations, car le terme $(x+1)$ change de signe suivant les valeurs de x.

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, on annule le second terme et on réduit au même dénominateur.

a) Valeur interdite et ensemble de définition :
Le dénominateur est nul si $x+1=0$ soit $x=-1$ d'où $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

b) On annule le second terme et on réduit au même dénominateur :

$$\frac{4}{x+1} - 3 \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{4-3x-3}{x+1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+1}{x+1} \leqslant 0$$

c) On cherche les valeurs frontières :

$$-3x+1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$$

d) On remplit le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{-3x+1}{x+1}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

e) Pour que le quotient soit négatif ou nul, il faut que : $x < -1$ ou $x \geqslant \dfrac{1}{3}$.

La solution est alors : $S =]-\infty\,;\,-1[\cup \left[\dfrac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$