Fonctions carrée et inverse. Autres fonctions élémentaires

Table des matières

1 La fonction carrée — **2**
1.1 Fonction paire 2
1.2 Étude de la fonction carrée 3
1.3 Représentation de la fonction carrée 3

2 Fonction du second degré — **5**
2.1 Définition 5
2.2 Forme canonique 5
2.3 Variation et représentation de la fonction trinôme 5
2.4 Application 6

3 La fonction inverse — **7**
3.1 Fonction impaire 7
3.2 Étude de la fonction inverse 8
3.3 Représentation de la fonction inverse 9
3.4 Fonction homographique 10
3.5 Application 11

4 La fonction racine carrée — **12**
4.1 Étude de la fonction racine carrée 12
4.2 Représentation 12

5 La fonction cube — **13**
5.1 Étude de la fonction cube 13
5.2 Représentation 14
5.3 Application 14

1 La fonction carrée

1.1 Fonction paire

Définition 1 : On dit qu'une fonction f définie dans l'ensemble de définition D_f est une fonction paire si et seulement si :
- l'ensemble D_f est symétrique par rapport à « zéro »
- $\forall x \in D_f \quad$ on a $\quad f(-x) = f(x)$

Remarque : D_f doit être symétrique par rapport à l'origine.
C'est à dire que si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$.

$\mathbb{R} - \{2\}$ n'est pas symétrique. On ne peut pas comparer $f(-2)$ à $f(2)$ (qui n'existe pas).
Par contre $\mathbb{R} - \{-2;2\}$ est symétrique.

Exemples :

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ est paire. En effet on a :

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \quad \text{et } \mathbb{R} \text{ est symétrique}$$

- Soit les fonction f_1 et f_2 les fonctions définies par :

$$f_1(x) = 2x^4 + x^2 - 1 \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

  Montrer que les fonctions f_1 et f_2 sont paires sur leur ensemble de définition.

  f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ donc symétrique et :

$$f_1(-x) = 2(-x)^4 + (-x)^2 - 1 = 2x^4 + x^2 - 1 = f_1(x)$$

  Donc f_1 est paire.

  f_2 est définie sur $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ donc symétrique et :

$$f_2(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f_2(x) \quad \text{Donc } f_2 \text{ est paire.}$$

- Montrons que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 3x$ n'est pas paire. Pour montrer que la proposition est fausse, trouvons un contre-exemple :

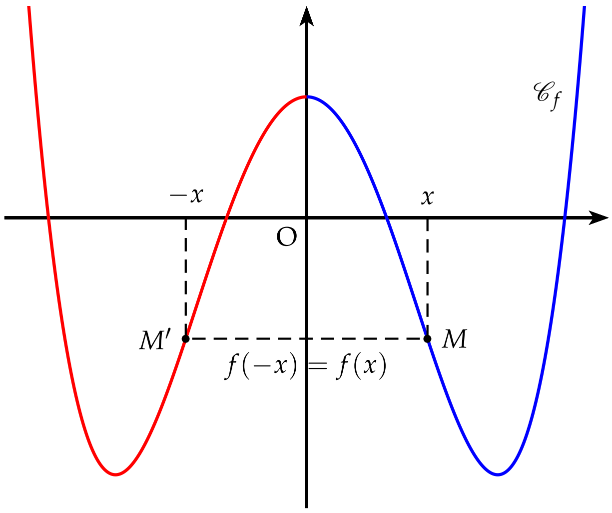
$$g(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10 \quad \text{et} \quad g(2) = 2^2 - 3(2) = 4 - 6 = -2$$

  Comme $g(-2) \neq g(2)$, la fonction g n'est pas paire.

D'autres fonctions que l'on a pas encore vues sont paires. C'est par exemple le cas de la fonction $\cos x$

Les fonctions paires doivent leur nom du fait que les polynômes composés uniquement de puissances paires possèdent cette propriété.

Propriété 1 : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction fonction paire f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée.



Tout point $M(x; f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point symétrique $M'(-x, f(-x) = f(x))$ sur la courbe.

1.2 Étude de la fonction carrée

Définition 2 : On appelle fonction carrée, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Propriété : La fonction carrée est une fonction paire, donc sa représentation est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Variation : Soit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_2 > x_1$. Calculons alors le taux d'accroissement :

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1$$

- Si $x_2 > x_1 \geqslant 0$ alors $T > 0$ donc la fonction est f croissante.
- Si $x_1 < x_2 \leqslant 0$ alors $T < 0$ donc la fonction f est décroissante.

Remarque : On retrouve la propriété de symétrie par rapport à l'axe des ordonnées d'une fonction paire.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

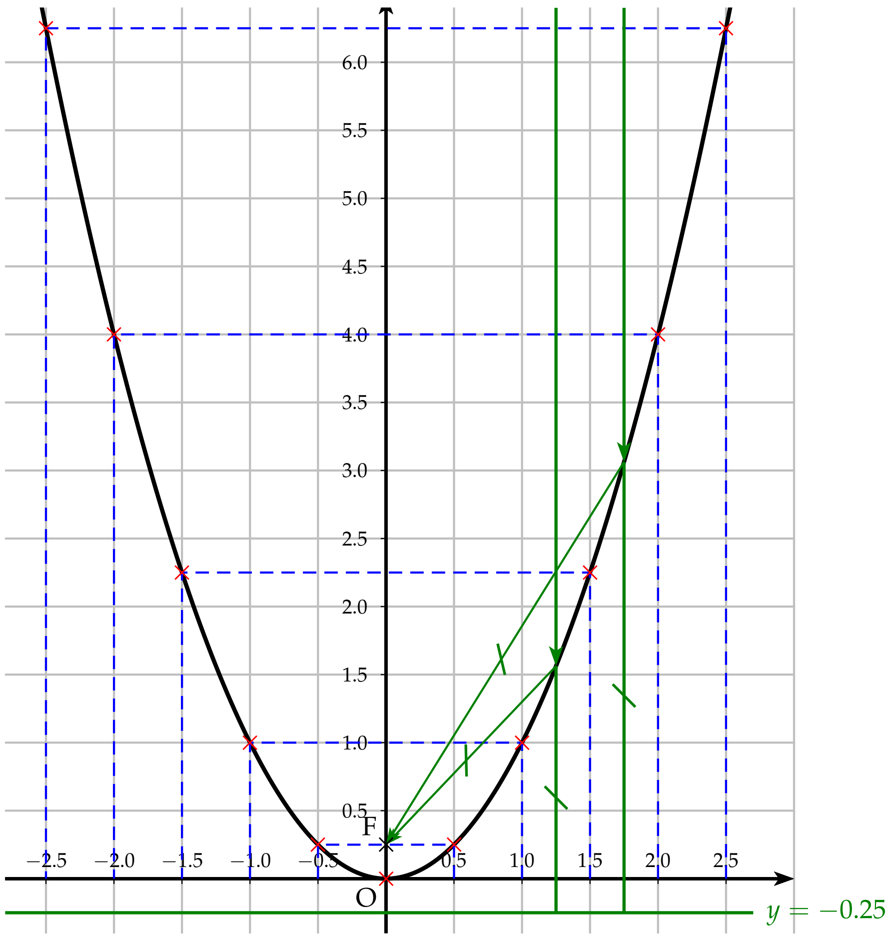
1.3 Représentation de la fonction carrée

Définition 3 : La représentation de la fonction carrée est une parabole de sommet O.

Comme cette parabole est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on cherchera des points dont les abscisses sont positives. On complétera alors par les points symétriques.

Tableau de valeurs

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5
x^2	0	0,25	1	2,25	4	6,25



Remarque : Cette parabole possède un foyer F(0 ; 0,25). Tous les points de la parabole sont équidistants de la droite d'équation $y = -0.25$ et du foyer F. Si la parabole était un miroir tous les rayons verticaux se refléteraient en F. Cette caractéristique permet de concentrer la lumière des étoiles lointaines (télescope) ou des ondes électromagnétiques (antenne parabolique).

La parabole était déjà connue des grecs, soit donc bien avant la création du concept de fonction. Cette courbe fait partie de ce que les grecs appelaient les « coniques » : section d'un cône par un plan. La parabole est obtenue avec un plan parallèle à une génératrice du cône.

2 Fonction du second degré

2.1 Définition

Définition 4 : On appelle fonction polynôme du second degré ou fonction trinôme, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Exemple : Soit les trois fonctions polynôme du second degré :

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 + 3x - 1 \quad \text{on a :} \quad a = 2,\ b = 3,\ c = -1 \\
g(x) &= 4x^2 - 5 \quad \text{on a :} \quad a = 4,\ b = 0,\ c = -5 \\
h(x) &= -3x^2 + 2x \quad \text{on a :} \quad a = -3,\ b = 2,\ c = 0
\end{aligned}$$

2.2 Forme canonique

Théorème 1 : Soit f une fonction trinôme, $f(x)$ peut alors se mettre sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a}$$

Exemple : Soit $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$. Trouver la forme canonique.

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2x^2 - 4x + 3 = -2(x^2 + 2x) + 3 = -2[(x+1)^2 - 1] + 3 \\
&= -2(x+1)^2 + 2 + 3 = -2(x+1)^2 + 5
\end{aligned}$$

Remarque : On a alors $a = -2\,;\ \alpha = -1\,;\ \beta = 5$.

2.3 Variation et représentation de la fonction trinôme

Théorème 2 : La fonction trinôme a les même variation que la fonction carrée si $a > 0$ et des variations contraires si $a < 0$.
La représentation de la fonction trinôme est une parabole dirigée vers le haut si $a > 0$ et dirigée vers le bas si $a < 0$.

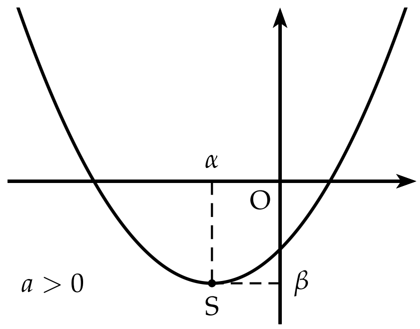
- $a > 0$

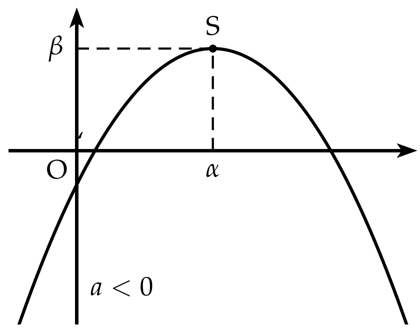
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a(x-\alpha)^2 + \beta$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

- $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a(x-\alpha)^2 + \beta$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

Théorème 3 : La représentation de la fonction trinôme est une parabole d'axe verticale et de sommet $S(\alpha, \beta)$.





Remarque : Une parabole de sommet $S(x_0; y_0)$ a pour fonction associée f de la forme : $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$

2.4 Application

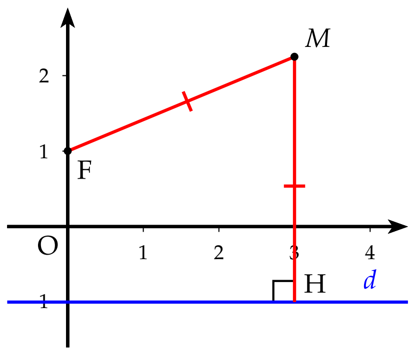
En géométrie, on appelle parabole une courbe constituée des points M équidistants d'un point F appelé foyer et d'une droite fixe.

1) **Construction de la parabole**

On donne le foyer de la parabole F(0 ;1) et la droite d fixe d'équation $y = -1$. H est le projeté orthogonal de M sur la droite d. On obtient alors la figure ci-contre :

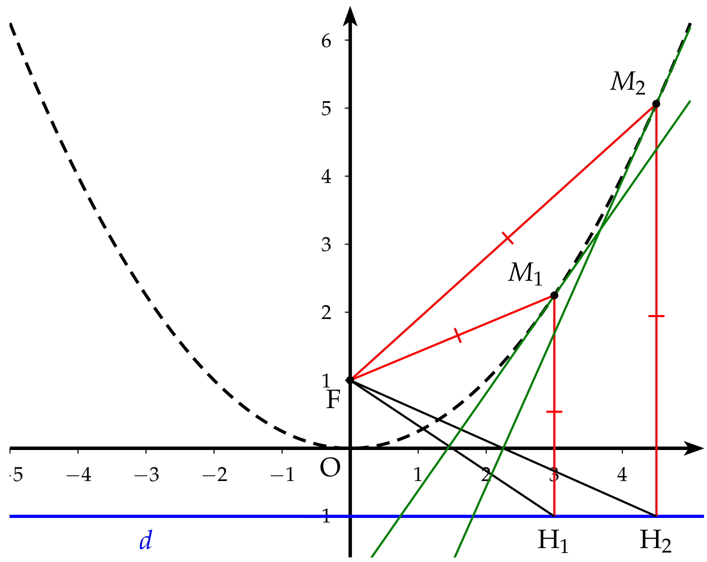
Comme les points M sont équidistants de F et de la droite d, on peut écrire :

$$MF = MH$$



M est donc sur la médiatrice de [FH]. Pour tracer un point M, on prend un point quelconque H sur la droite d. On trace ensuite la médiatrice de [FH]. M est alors l'intersection de cette médiatrice avec la perpendiculaire à d en H. Avec un logiciel, on peut alors obtenir l'ensemble des points M lorsque H parcourt d. On obtient la figure ci-après :

Remarque : On remarque que la médiatrice est alors la tangente en M à la parabole ainsi tracée.



2) **Relation entre les coordonnées**

On note $M(x;y)$ les coordonnées du point M. On obtient alors les coordonnées de $\mathrm{H}(x;-1)$. On calcule alors les distances au carrée $M\mathrm{F}^2$ et $M\mathrm{H}^2$.

$$M\mathrm{F}^2 = (x - x_\mathrm{F})^2 + (y - y_\mathrm{F})^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$M\mathrm{H}^2 = (x - x_\mathrm{H})^2 + (y - y_\mathrm{H})^2 = (y+1)^2$$

De l'égalité des distances, on en déduit :

$$x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1$$
$$-4y = -x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4}x^2$$

On trouve la fonction $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ qui représente la parabole construite.

3 La fonction inverse

3.1 Fonction impaire

Définition 5 : On dit qu'une fonction est impaire sur son ensemble de définition D_f si, et seulement si :
- l'ensemble D_f est symétrique par rapport à « zéro »
- $\forall x \in D_f \quad$ on a $\quad f(-x) = -f(x)$

Exemples :

1) La fonction f définie par $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ sont impaires. En effet :

$$f(-x) = -x = -f(x)$$
$$g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}$ est impaire. En effet :

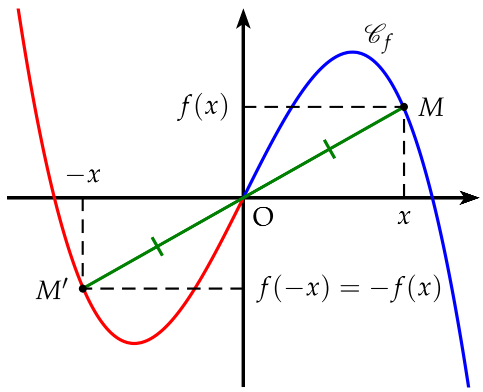
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

3) Par contre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 3$ n'est pas impaire. Montrons le par un contre exemple :

$$f(1) = 2 \quad \text{et} \quad f(-1) = -8 \quad \text{donc} \quad f(-1) \neq -f(1)$$

Remarque : La fonction impaire tire son nom du fait que les polynômes dont les puissances sont uniquement impaires vérifient cette propriété.

Propriété 2 : La courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction impaire f est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Tout point $M(x; f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point symétrique $M'(-x, f(-x) = -f(x))$ sur la courbe.

Remarque : Toute courbe d'une fonction impaire, définie en 0, passe par l'origine.

3.2 Étude de la fonction inverse

Définition 6 : On appelle fonction inverse, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété : La fonction inverse est une fonction impaire.

Variations : Soit deux réels non nuls x_1 et x_2 tels que $x_2 > x_1$. Calculons le taux d'accroissement :

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}}{x_2 - x_1} = \frac{-\dfrac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1 x_2}$$

si $x_2 > x_1 \geqslant 0$ ou si $x_1 < x_2 \leqslant 0$, $T < 0$ car le produit de nombres de même signe est positif. On en déduit que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

3.3 Représentation de la fonction inverse

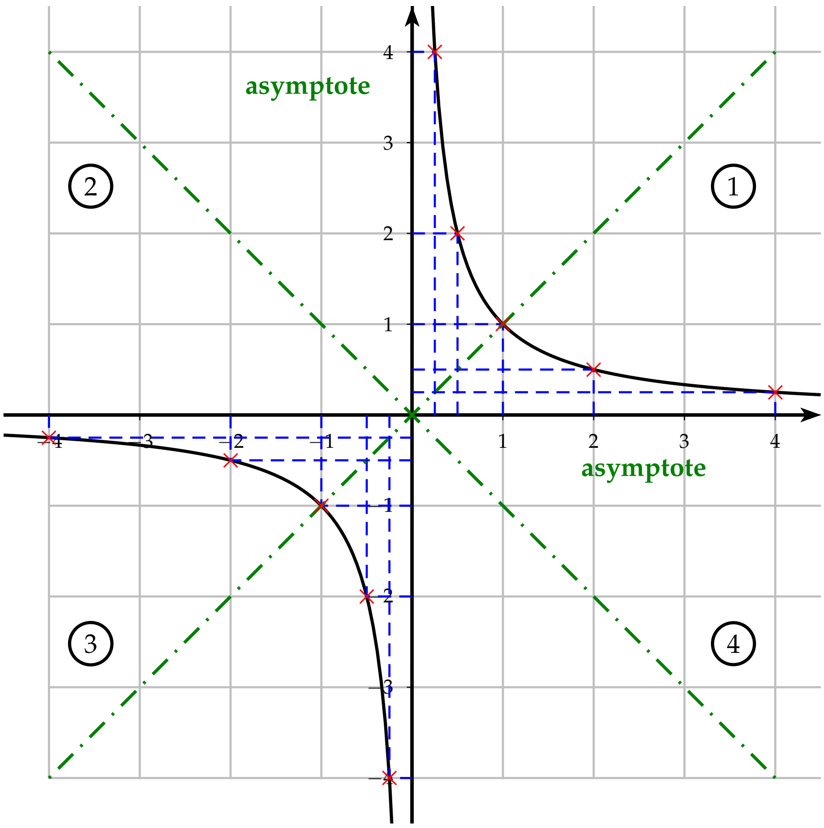
Définition 7 : La représentation de la fonction inverse est une hyperbole centrée à l'origine

Comme cette hyperbole est symétrique par rapport à l'origine, on cherchera des points dont les abscisses sont positives. On complétera alors par les points symétriques.

Tableau de valeur :

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

On obtient alors l'hyperbole suivante :



Remarque :

- L'hyperbole possède deux asymptotes : droites dont la courbe se rapproche de plus en plus lorsque x se rapproche de 0 ou de l'infini. Ces deux asymptotes sont les axes de coordonnées. L'hyperbole est dite équilatère car les asymptotes sont perpendiculaires.
- L'hyperbole est une conique obtenue par la section d'un cone par un plan dont la pente est supérieure aux génératrices du cône.
- L'hyperbole possède deux axes de symétrie : les deux bissectrices des axes de coordonnées.
- L'hyperbole se trouve dans les cadrans 1 et 3 du repère.

3.4 Fonction homographique

Définition 8 : On appelle fonction homographique, une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$ et qui peut se mettre sous la forme :

$$f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \beta$$

- La représentation d'une fonction homographique est une hyperbole centrée en $\Omega(\alpha, \beta)$
- Si $a > 0$, les variations de la fonction homographique sont identiques à la fonction inverse.
- Si $a < 0$, les variations de la fonction homographique sont contraires à la fonction inverse.

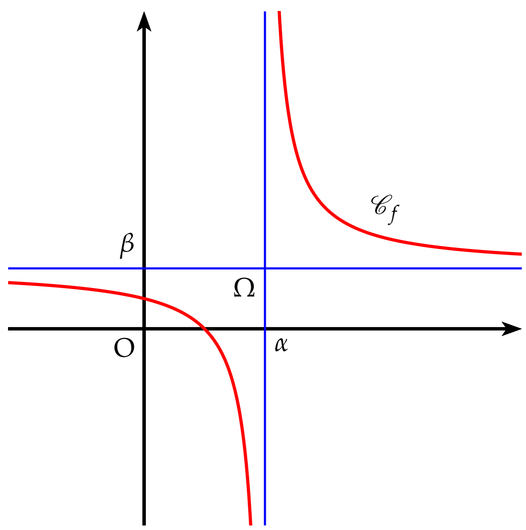
Variations :

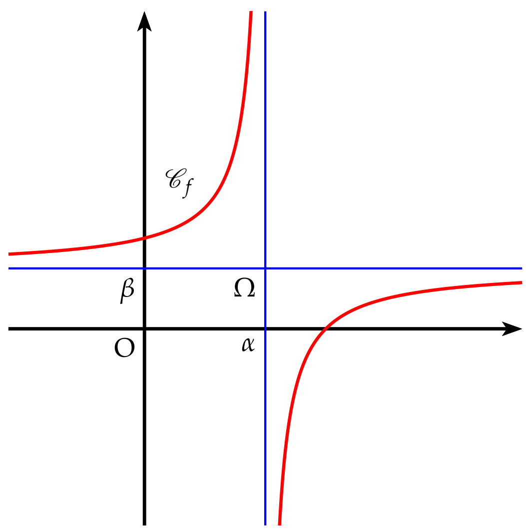
$a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	β ↘	$-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	β

$a < 0$

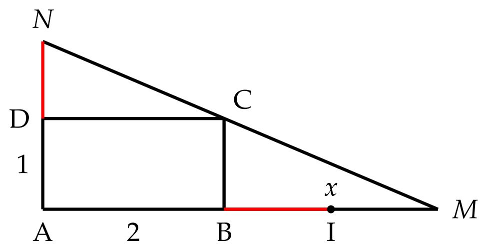
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	β ↗	$+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	β





3.5 Application

ABCD est un rectangle tel que AB $= 2$ et AD $= 1$. A tout réel positif x, on associe le point M tel que les points A, B et M sont alignés dans cet ordre avec B$M = x$. On note I le milieu du segment $[\mathrm{B}M]$. La droite $(M\mathrm{C})$ coupe (AD) en N.
Déterminer la position du point M pour que D$N =$ AI.
On fait une figure, pour comprendre le problème :



Comme les droites (DC) et $(\mathrm{A}M)$ sont parallèle, nous avons une configuration de Thalès. Appliquons le théorème de Thalès dans le triangles DCN et AMN, on a alors :

$$\frac{N\mathrm{D}}{N\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{A}M} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{D}N}{1+\mathrm{D}N} = \frac{2}{2+x}$$

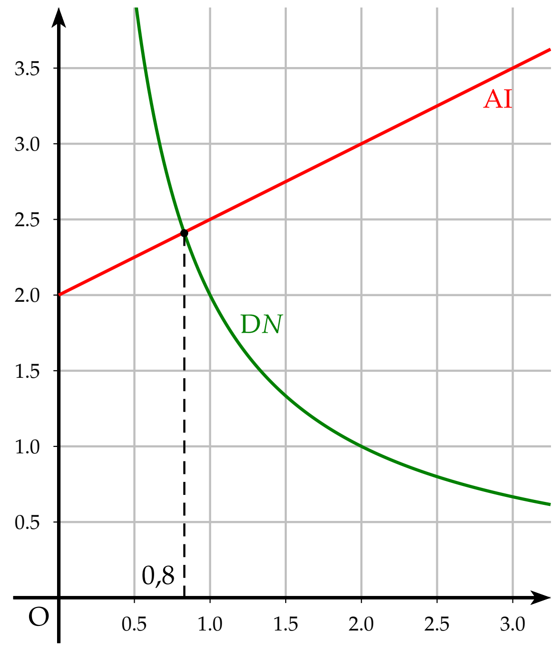
On fait un produit en croix, on obtient alors :

$$\mathrm{D}N(2+x) = 2(1+\mathrm{D}N) \quad \Leftrightarrow \quad 2\mathrm{D}N + x\mathrm{D}N = 2 + 2\mathrm{D}N \quad \text{soit} \quad \mathrm{D}N = \frac{2}{x}$$

On calcule ensuite AI : $\mathrm{AI} = \mathrm{AB} + \dfrac{\mathrm{B}M}{2} = 2 + \dfrac{x}{2}$

Pour résoudre le problème, il faut donc avoir : $2 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x}$.

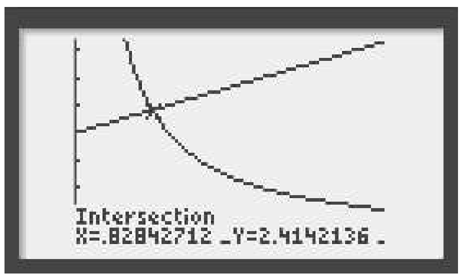
Pour résoudre graphiquement ce problème, on trace alors la droite $y = 2 + \dfrac{x}{2}$ et l'hyperbole $y = \dfrac{2}{x}$. On obtient alors la représentation suivante :



Avec une calculatrice, on peut :

- tracer les courbes $Y_1 = 2 + \dfrac{X}{2}$ et $Y_2 = \dfrac{2}{X}$
- fenêtre $X \in [0; 3,3]$ et $Y \in [0; 3.7]$.
- l'intersection des deux courbes,

On obtient :



On obtient donc la solution approchée : $x \simeq 0,8$.

si l'on cherche le résultat exact, il faut résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + 2 &= \frac{2}{x} \qquad \text{on multiplie par } 2x \\ x^2 + 4x &= 4 \quad \text{or } (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4 \quad \text{donc} \quad x^2 + 4x = (x+2)^2 - 4 \\ (x+2)^2 - 4 &= 4 \\ (x+2)^2 &= 8 \end{aligned}$$

On obtient comme solution positive : $x + 2 = \sqrt{8}$ soit $x = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 0,83$

4 La fonction racine carrée

4.1 Étude de la fonction racine carrée

Définition 9 : On appelle fonction racine carrée, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Remarque : La fonction racine carrée est la **fonction réciproque** de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. En effet lorsque l'on connaît le carré, pour retrouver le nombre de départ, on applique à ce carrée la fonction racine.

Variation : Soit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Calculons le taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} T &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} \\ &= \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} = \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} \end{aligned}$$

Comme $x_2 > x_1 \geqslant 0$, $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$, on en déduit que $T > 0$

La fonction racine carré est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$\sqrt{x}$	0 ↗	$+\infty$

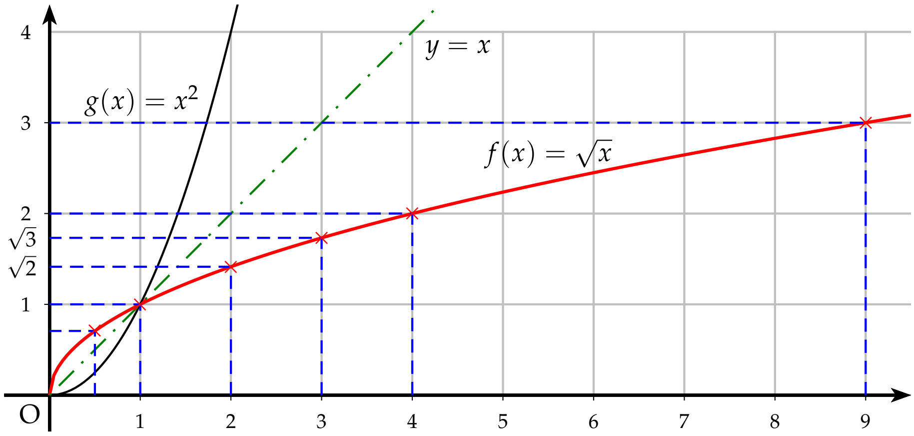
4.2 Représentation

Théorème 4 : La représentation de la fonction racine carrée est une demi parabole d'axe (Ox)

Remarque : On tracera sur un même graphique la fonction racine et la fonction carrée qui est sa réciproque.

Tableau de valeurs :

x	0	0,5	1	2	3	4	9
$\sqrt{x}$	0	$\simeq 0,707$	1	$\simeq 1,414$	$\simeq 1,732$	2	3



Remarque : La courbe de la fonction racine est symétrique par rapport à la première bissectrice à la courbe de la fonction carrée. On peut montrer que lorsqu'une fonction admet une réciproque, les courbes de la fonction et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

5 La fonction cube

5.1 Étude de la fonction cube

Définition 10 : On appelle fonction cube, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3$$

Propriété : La fonction cube est une fonction impaire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine. En effet, pour tout x, on a :
$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

Variation : Soit deux réels x_1 et x_2 tels que $x_2 > x_1 \geqslant 0$. Calculons le taux d'accroissement

$$T = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1}$$

Montrons l'identité remarquable suivante : $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

On développe pour cela la deuxième quantité :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$$

En appliquant cette identité au taux d'accroissement :

$$T = \frac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2$$

On a $x_2^2 + x_1^2 > 0$, et comme x_2 et x_1 sont de même signe, on a $x_2 x_1 > 0$ donc $x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2 > 0$ et donc $T > 0$

La fonction cube est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5.2 Représentation

La fonction cube étant impaire, sa courbe est symétrique par rapport à l'origine. On calculera des points pour des abscisses positives, puis on prendra ensuite les symétriques par rapport à l'origine.

Tableau de valeurs :

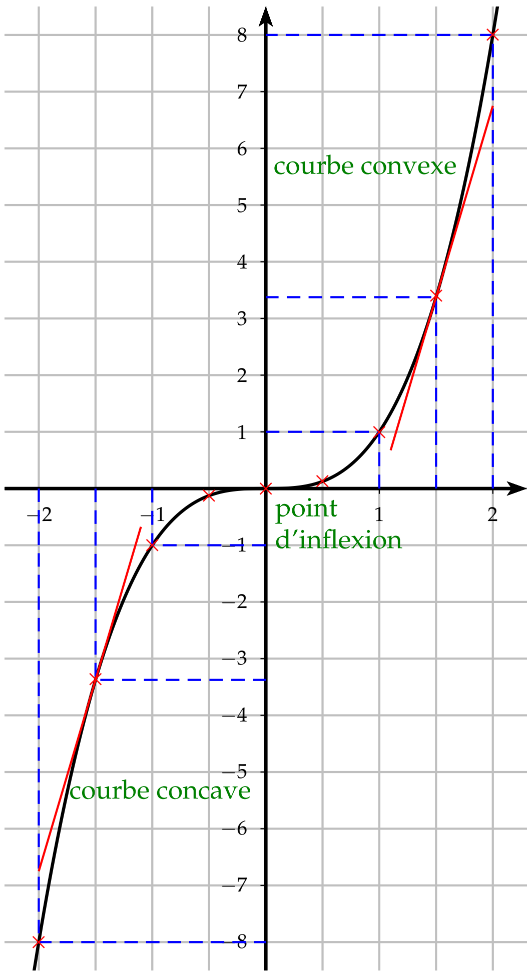
x	0	0,5	1	1.5	2
x^3	0	0,125	1	3,375	8

Remarque : On remarque que la courbe admet un changement de concavité. C'est à dire que la courbe est tournée vers le haut pour $x > 0$ et tournée vers le bas pour $x < 0$.

Lorsque la courbe est tournée vers le haut, c'est à dire que la courbe est au dessus de sa tangente, on dit que la courbe est convexe.

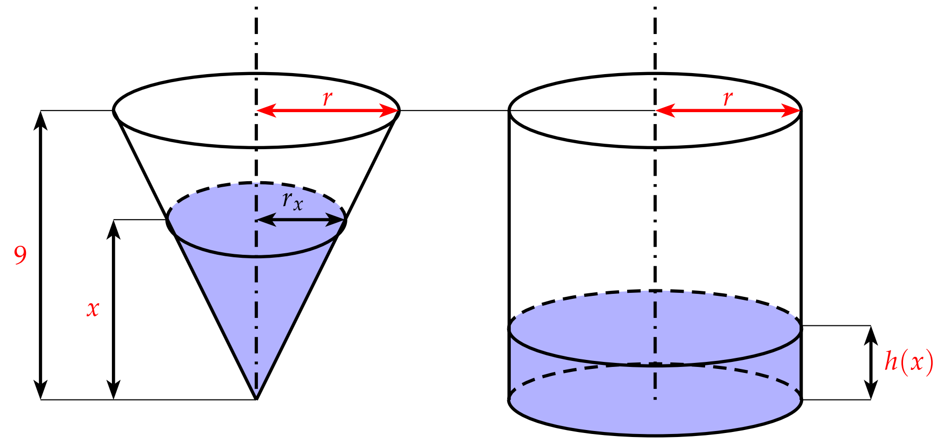
Lorsque la courbe est tournée vers le bas, c'est à dire que la courbe est au dessous de sa tangente, on dit que la courbe est concave.

Le point de la courbe où se situe le changement de concavité, s'appelle le point d'inflexion.



5.3 Application

Deux éprouvettes $\mathscr{E}_1$ de forme conique et $\mathscr{E}_2$ de forme cylindrique ont les formes indiquées sur le dessin ci-après (unité de longueur : 1 cm). On verse dans $\mathscr{E}_1$ de l'eau jusqu'à une hauteur x, puis on transvase le contenu dans $\mathscr{E}_2$ où l'eau atteint alors une hauteur, fonction de x notée $h(x)$.



1) Déterminer $h(x)$ en fonction de x.
2) Étudier la fonction h sur l'intervalle $[0;9]$.
3) Représenter la fonction h sur $[0;9]$.
4) Déterminer graphiquement la hauteur x de l'éprouvette $\mathscr{E}_1$ pour avoir une hauteur dans le cylindre de 1 cm.
5) Peut-on remplir à demi $\mathscr{E}_2$ en une seule fois ?

⇒ ⇒

1) On rappelle que les volumes V_1 d'un cône et V_2 d'un cylindre tous deux de rayon R et de hauteur h sont de la forme :

$$V_1 = \frac{\pi R^2 h}{3} \qquad \text{et} \qquad V_2 = \pi R^2 h$$

Comme dans un cône de forme donnée, le rayon est proportionnel à la hauteur, le rayon r_x du cône défini par l'eau vérifie :

$$\frac{r_x}{r} = \frac{x}{9} \quad \Leftrightarrow \quad r_x = \frac{x\,r}{9}$$

Le volume V_1 d'eau dans le cône est donc de :

$$V_1 = \frac{\pi r_x^2 x}{3} = \frac{\pi \left(\dfrac{xr}{9}\right)^2 x}{3} = \frac{\pi\, r^2 x^3}{243}$$

Le volume V_2 d'eau dans le cylindre : $V_2 = \pi\, r^2 h(x)$

De l'égalité des deux volume, on en déduit :

$$\frac{\pi\, r^2 x^3}{243} = \pi\, r^2 h(x) \quad \Leftrightarrow \quad h(x) = \frac{x^3}{243}$$

2) La fonction h est du type $h(x) = ax^3$ avec $a = \dfrac{1}{243}$ donc $a > 0$.

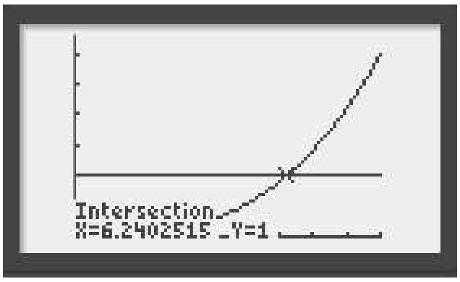
La fonction h a donc même variation que la fonction cube. La fonction h est donc strictement croissante sur $[0;9]$. On a donc le tableau de variation suivant :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ 9
$h(x)$	0 $\nearrow$ 3

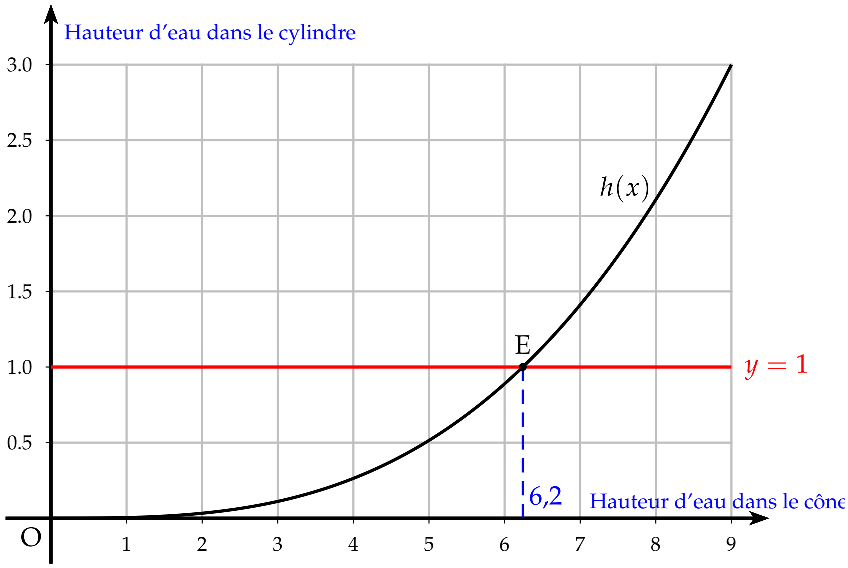
Avec une calculatrice, on rentre les fonctions :

- $Y_1 = \dfrac{X^3}{243}$ et $Y_2 = 1$
- fenêtre $X \in [0;9]$ $Y \in [0;3]$
- intersection

On obtient :



3) On obtient la représentation suivante :



4) Pour avoir une hauteur d'eau de 1 cm dans le cylindre, on cherche x pour avoir $h(x) = 1$. A l'aide de la représentation on trouve alors : $x \simeq 6,2$. On doit donc avoir à peu près 6,2 cm d'eau dans le cône.

5) On ne peut remplir à demi le cylindre en une seule fois. En effet, le maximum de hauteur que l'on peut obtenir avec le cône plein à ras bord est de 3 cm.