Fonctions carrée et inverse. Autres fonctions élémentaires

Proofreading of English by Laurence Weinstock

Table des matières

1 La fonction carrée

1.1 Fonction paire

Définition 1 : On dit qu'une fonction f définie sur D_f est **paire** si :

- l'ensemble D_f est symétrique par rapport à « zéro »
- $\forall x \in D_f, \quad f(-x) = f(x)$

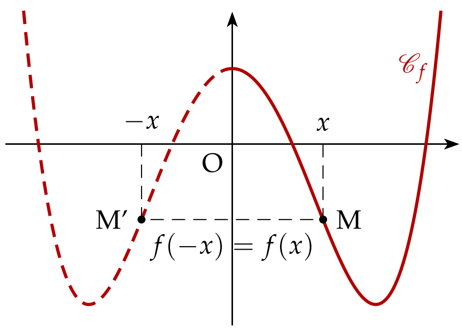
Remarque : D_f doit être symétrique car si $x \in D_f$ alors $-x \in D_f$.
$\mathbb{R}$, $[-3\,;3]$ et $\mathbb{R} - \{-2\,;2\}$ sont symétriques mais pas $\mathbb{R} - \{1\}$.

Exemples :

- La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ est paire
  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ et $\mathbb{R}$ est symétrique
- Les fonctions f_1 et f_2 définies par : $f_1(x) = 2x^4 + x^2 - 1$ et $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
  sont paires car $D_{f_1} = \mathbb{R}$ et $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1\,;1\}$ sont symétriques et :
  $$f_1(-x) = 2(-x)^4 + (-x)^2 - 1 = 2x^4 + x^2 - 1 = f_1(x)$$
  $$f_2(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2-1} = f_2(x)$$
- g définie par $g(x) = x^2 - 3x$ n'est pas paire car : $g(1) = -2$ et $g(-1) = 4$
- La fonction cos est une fonction paire (voir chapitre trigo)

Propriété 1 : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction paire f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnée.

Tout point $\mathrm{M}(x\,; f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point symétrique sur la courbe $\mathrm{M}'(-x, f(-x)) = (-x\,; f(x))$



1.2 Étude de la fonction carrée

Définition 2 : La fonction carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x^2$$

Remarque : La fonction carrée est une fonction paire, donc sa représentation est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Théorème 1 : La fonction carrée est :

- décroissante sur $]-\infty\,;0]$
- croissante sur $[0\,;+\infty[$

Démonstration : Calculons de taux d'accroissement entre x_1 et x_2 :

$$t = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{x_2-x_1} = x_2+x_1$$

- Si $x_2 > x_1 \geqslant 0$ alors $t > 0$ donc la fonction est f croissante.
- Si $x_1 < x_2 \leqslant 0$ alors $t < 0$ donc la fonction f est décroissante.

On obtient le tableau de variation suivant :

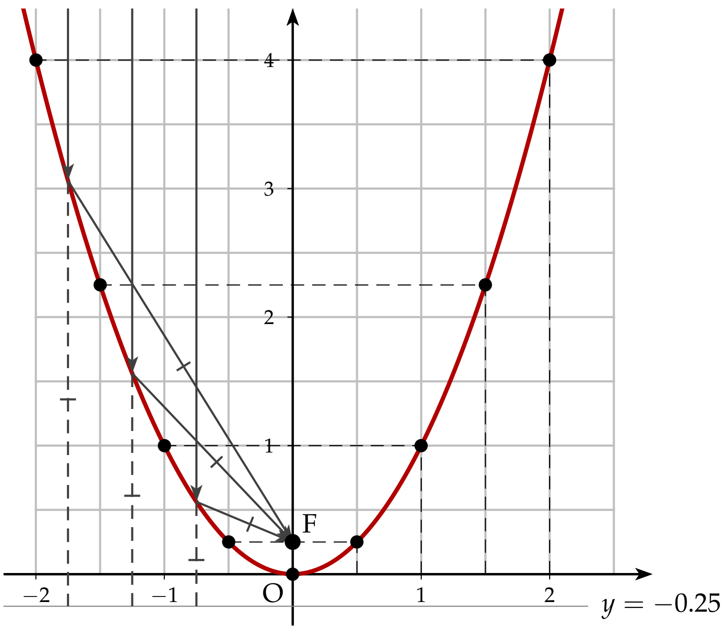
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

1.3 Représentation de la fonction carrée

Théorème 2 : La fonction carrée est représentée une **parabole**.
Cette parabole est de sommet O et tournée vers le haut (convexe).

On prend quelques points d'abscisses positives que l'on complète par symétrie.

x	0	0,5	1	1,5	2
x^2	0	0,25	1	2,25	4



Propriété : Cette parabole possède un foyer F(0; 0,25). Tous les points de la parabole sont équidistants de la droite d'équation $y = -0.25$ et du foyer F.

Si la parabole était un miroir tous les rayons verticaux se refléteraient en F. Cette caractéristique permet de concentrer la lumière des étoiles lointaines (télescope) ou des ondes électromagnétiques (antenne parabolique).

La parabole était déjà connue des grecs, soit donc bien avant la création du concept de fonction. Cette courbe fait partie de ce que les grecs appelaient les « coniques » : section d'un cône par un plan. La parabole est obtenue avec un plan parallèle à une génératrice du cône.

2 Fonction du second degré

2.1 Définition

Définition 3 : Une fonction f du second degré est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

Exemple : Soit les trois fonctions polynôme du second degré :

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 1 \quad \text{on a :} \quad a = 2,\ b = 3,\ c = -1$$
$$g(x) = 4x^2 - 5 \quad \text{on a :} \quad a = 4,\ b = 0,\ c = -5$$
$$h(x) = -3x^2 + 2x \quad \text{on a :} \quad a = -3,\ b = 2,\ c = 0$$

2.2 Forme canonique

Théorème 3 : Toute fonction f du second degré peut se mettre sous la forme, appelée **canonique** :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = -\frac{b}{2a}$$

Exemple : Déterminer la forme canonique de $f(x) = -2x^2 - 4x + 3$.

$$\begin{aligned} f(x) &= -2x^2 - 4x + 3 = -2(x^2 + 2x) + 3 = -2[(x+1)^2 - 1] + 3 \\ &= -2(x+1)^2 + 2 + 3 = -2(x+1)^2 + 5 \end{aligned}$$

Remarque : On a alors $a = -2$, $\alpha = -1$, $\beta = 5$.

2.3 Variation et représentation de la fonction du second degré

Théorème 4 : Une fonction du second degré a

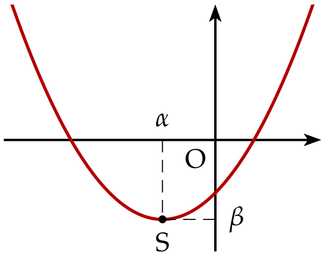
- les **mêmes variations** que la fonction carrée si $a > 0$
- des **variations contraires** à la fonction carrée si $a < 0$.

Une fonction du second degré est représentée par une **parabole** :

- de sommet $\mathrm{S}(\alpha\,;\beta)$ et dirigée **vers le haut** si $a > 0$ (convexe).
- de sommet $\mathrm{S}(\alpha\,;\beta)$ et dirigée **vers le bas** si $a < 0$ (concave).

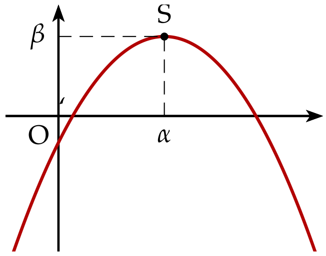
- $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$



- $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$



Remarque : Une parabole de sommet $S(x_0\,;\,y_0)$ représente une fonction f telle :

$$f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$$

2.4 Application

> En géométrie, on appelle parabole une courbe constituée des points M **équidistants** d'un point F appelé foyer et d'une droite fixe.

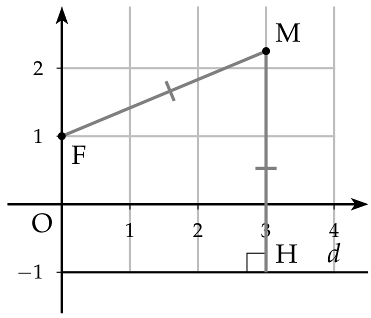
1) **Construction de la parabole**

On donne le foyer de la parabole F(0;1) et la droite d fixe d'équation $y = -1$.

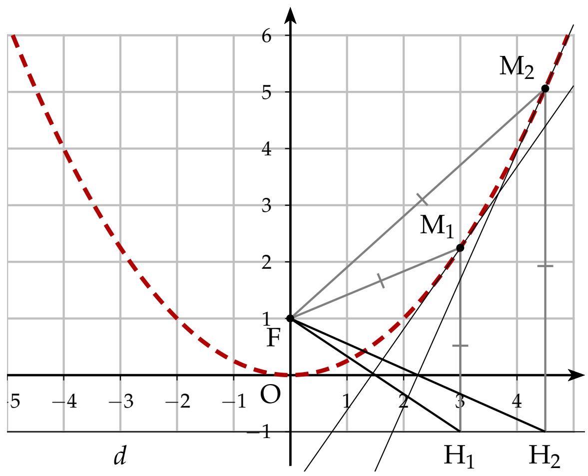
H est le projeté orthogonal de M sur la droite d. On obtient alors la figure ci-contre :

Comme les points M sont équidistants de F et de la droite d, on peut écrire :

$$\text{MF} = \text{MH}$$



M est donc sur la médiatrice de [FH]. Pour tracer un point M, on prend un point quelconque H sur la droite d. On trace ensuite la médiatrice de [FH].
M est alors l'intersection de cette médiatrice avec la perpendiculaire à d en H.
On obtient alors l'ensemble des points M lorsque H parcourt d :



2) **Relation entre les coordonnées**
Soit $M(x\,;\,y)$, on obtient alors $H(x\,;-1)$.
On calcule alors les distances au carrée MF^2 et MH^2.

$MF^2 = (x - x_F)^2 + (y - y_F)^2 = x^2 + (y-1)^2$
$MH^2 = (x - x_H)^2 + (y - y_H)^2 = (y+1)^2$

$$MF^2 = MH^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + \cancel{y^2} - 2y + \cancel{1} = \cancel{y^2} + 2y + \cancel{1}$$
$$\Leftrightarrow -4y = -x^2 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}x^2$$

On trouve la fonction $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$ représentée par la parabole construite.

3 La fonction inverse

3.1 Fonction impaire

Définition 4 : On dit qu'une fonction f définie sur D_f est **impaire** si :
- l'ensemble D_f est symétrique par rapport à « zéro »
- $\forall x \in D_f,\ \ f(-x) = -f(x)$

Exemples :

1) f et g définies sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$ sont impaires :

$$f(-x) = -x = -f(x) \quad \text{et} \quad g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$$

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^2+1}$ est impaire :

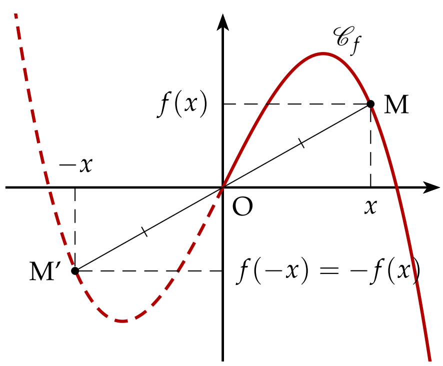
$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 2(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x^3+2x}{x^2+1} = -f(x)$$

3) f définie par $f(x) = 5x - 3$ n'est pas impaire car : $f(1) = 2$ et $f(-1) = -8$.

Propriété 2 : La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction impaire f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Tout point $M(x\,;\,f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un point symétrique sur la courbe $M'(-x\,,f(-x)) = (-x\,;\,-f(x))$.

Remarque : Une courbe d'une fonction impaire, définie en 0, passe par l'origine.



3.2 Étude de la fonction inverse

Définition 5 : La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Propriété : La fonction inverse est une fonction impaire.

Théorème 5 : La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et sur $\mathbb{R}^*_+$.

Démonstration : Calculons le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 :

$$t = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}}{x_2 - x_1} = \frac{-\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{x_1 x_2}$$

Si $x_2 > x_1 > 0$ ou si $x_1 < x_2 < 0$, on a $t < 0$ (produit de nbres de même signe).
La fonction inverse est alors décroissante $\mathbb{R}^*_-$ et sur $\mathbb{R}^*_+$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

3.3 Représentation de la fonction inverse

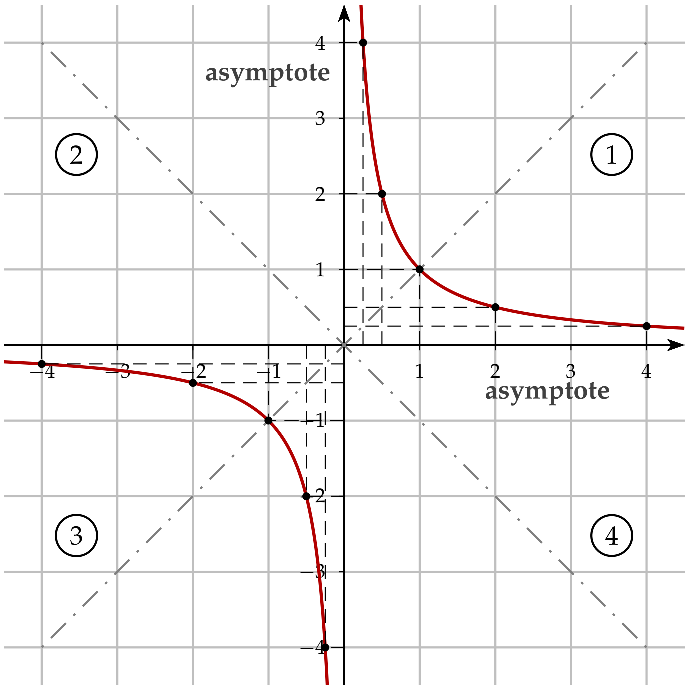
Définition 6 : La fonction inverse est représentée par une **hyperbole**.
Cette hyperbole est équilatère et centrée à l'origine.

On prend quelques points d'abscisses positives que l'on complète par symétrie.

x	$0,25$	$0,5$	1	2	4
$1/x$	4	2	1	$0,5$	$0,25$

Remarque :

- L'hyperbole possède deux asymptotes : droites dont la courbe se rapproche de plus en plus lorsque x se rapproche de 0 ou de l'infini. Ces deux asymptotes sont les axes de coordonnées. L'hyperbole est dite équilatère car les asymptotes sont perpendiculaires.
- L'hyperbole est une conique obtenue par la section d'un cône avec un plan dont la pente est supérieure aux génératrices du cône.
- L'hyperbole possède deux axes de symétrie : les deux bissectrices des axes de coordonnées.
- L'hyperbole se trouve dans les cadrans 1 et 3 du repère.



3.4 Fonction homographique

Définition 7 : Une fonction f homographique est définie sur $\mathbb{R} - \{\alpha\}$.

Elle peut se mettre sous la forme : $f(x) = \dfrac{a}{x-\alpha} + \beta$.

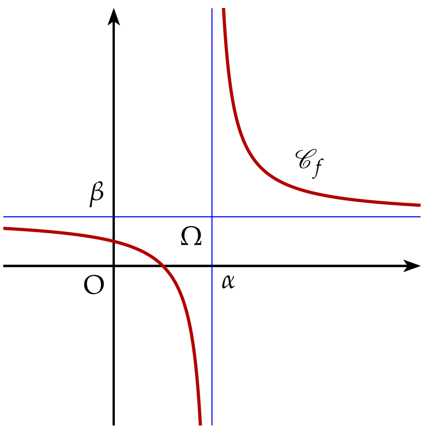
- f est représentée par une **hyperbole** centrée en $\Omega(\alpha, \beta)$

Une fonction homographique a :

- les **mêmes variations** que la fonction inverse si $a > 0$
- des **variations contraires** à la fonction inverse si $a < 0$.

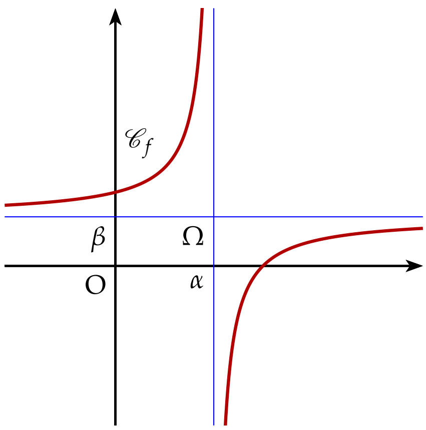
- $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\beta \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow \beta$



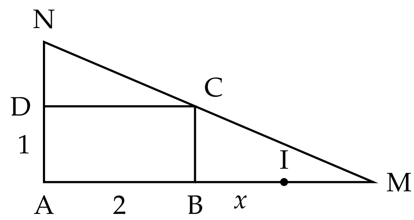
- $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\beta \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow \beta$



3.5 Application

ABCD est un rectangle tel que AB = 2 et AD = 1. À tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on construit le point M tel que A, B et M sont alignés dans cet ordre avec BM = x.
On note I le milieu du segment [BM]. La droite (MC) coupe (AD) en N.
Déterminer la position du point M pour que DN = AI.



Comme les droites (DC) et (AM) sont parallèles, on a une configuration de Thalès.
Appliquons le théorème de Thalès dans le triangles DCN et AMN, on a alors :

$$\frac{ND}{NA} = \frac{DC}{AM} \Leftrightarrow \frac{DN}{1+DN} = \frac{2}{2+x}$$

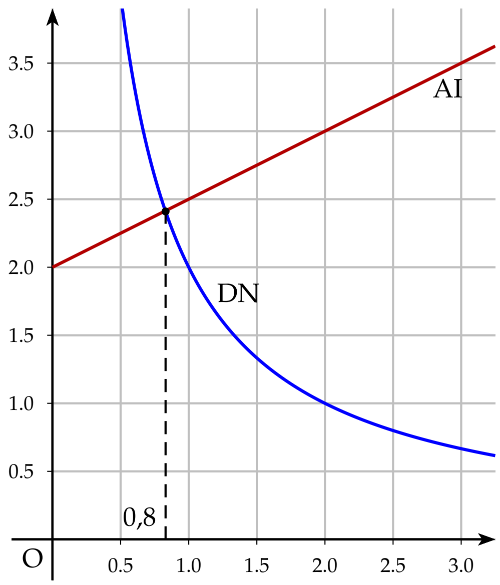
On fait un produit en croix, on obtient alors :

$$DN(2+x) = 2(1+DN) \Leftrightarrow \cancel{2DN} + x\,DN = 2 + \cancel{2DN} \quad \text{soit} \quad DN = \frac{2}{x}$$

On calcule ensuite AI : $AI = AB + \dfrac{BM}{2} = 2 + \dfrac{x}{2}$

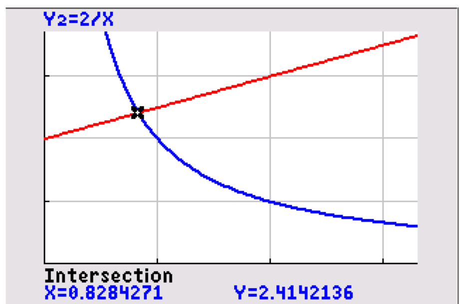
$DN = AI \Leftrightarrow 2 + \dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{x}$.

Pour résoudre graphiquement ce problème, il faut déterminer l'abscisse du point d'intersection de la droite $y = 2 + \dfrac{x}{2}$ et de l'hyperbole $y = \dfrac{2}{x}$:



Avec une calculatrice, on peut :

- tracer les courbes $Y_1 = 2 + \dfrac{X}{2}$ et $Y_2 = \dfrac{2}{X}$
- fenêtre $X \in [0\,;\,3,3]$ et $Y \in [0\,;\,3.7]$.
- intersection des deux courbes.



Graphiquement, on trouve : $x \approx 0,8$.

si l'on cherche le résultat exact, il faut résoudre l'équation suivante :

$$\frac{x}{2} + 2 = \frac{2}{x} \overset{\times 2x}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x = 4 \overset{+4}{\Leftrightarrow} x^2 + 4x + 4 = 8 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 8$$

On obtient comme solution positive : $x + 2 = \sqrt{8}$ soit $x = 2\sqrt{2} - 2 \simeq 0,828$

4 La fonction racine carrée

4.1 Étude de la fonction racine carrée

Définition 8 : La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Remarque : La fonction racine carrée est la **fonction réciproque** de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. En effet lorsque l'on connaît le carré, pour retrouver le nombre de départ, on applique à ce carrée la fonction racine carrée.

Théorème 6 : La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration : Calculons le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 :

$$t = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})}$$

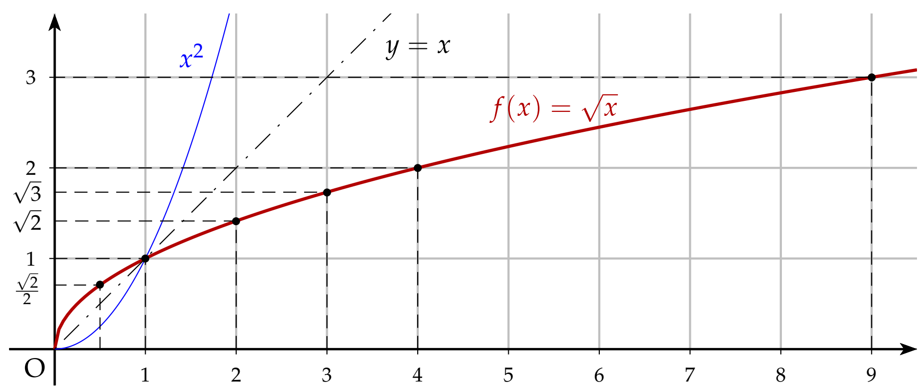
$$= \frac{x_2 - x_1}{(x_2 - x_1)(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})} = \frac{1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$$

Si $x_2 > x_1 \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x_2} + \sqrt{x_1} > 0$, on en déduit que $t > 0$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\sqrt{x}$	0 $\nearrow$ $+\infty$

4.2 Représentation

Théorème 7 : La fonction racine carrée est représentée par une demi-parabole d'axe (Ox)



Remarque : Les fonctions carrée et racine carrée sont réciproques entre elles, leur représentation sont symétrique par rapport à la première bissectrice $(y = x)$.

5 La fonction cube

5.1 Étude de la fonction cube

Définition 9 : La fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3$$

Remarque : La fonction cube est une fonction impaire car $(-x)^3 = -x^3$.

Théorème 8 : La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$

Démonstration : Calculons le taux d'accroissement entre x_1 et x_2 :

$$t = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1}$$

Montrons que : $x_2^3 - x_1^3 = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2\,x_1 + x_1^2)$

On développe pour cela la deuxième quantité :

$$(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2\,x_1 + x_1^2) = x_2^3 + \cancel{x_2^2 x_1} + \cancel{x_2 x_1^2} - \cancel{x_2^2 x_1} - \cancel{x_2 x_1^2} - x_1^3 = x_2^3 - x_1^3$$

On a alors : $t = \dfrac{(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2\,x_1 + x_1^2)}{x_2 - x_1} = x_2^2 + x_2\,x_1 + x_1^2$.

En prenant x_1 et x_2 de même signe alors $x_2\,x_1 > 0 \overset{+x_2^2+x_1^2}{\Rightarrow} x_2^2 + x_2\,x_1 + x_1^2 > 0$

et donc $t > 0$ La fonction cube est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

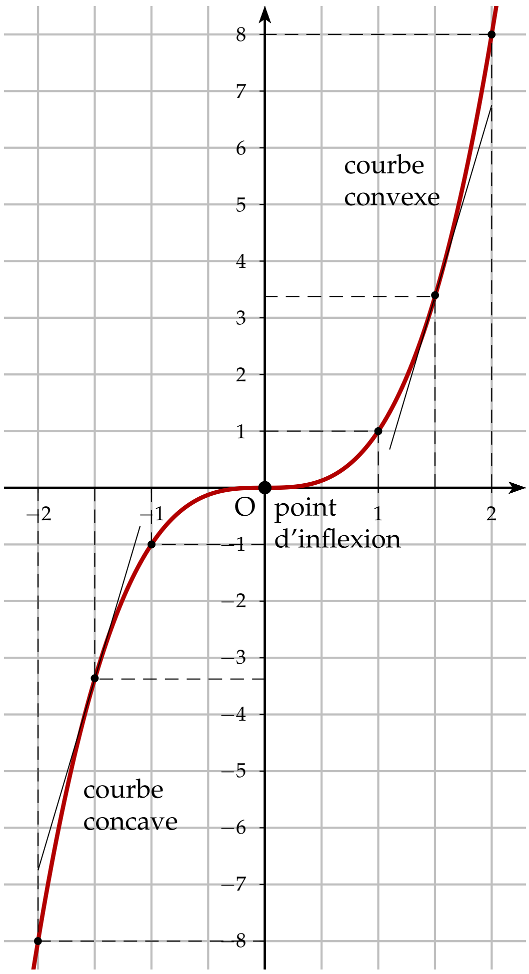
x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^3	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

5.2 Représentation

Propriété 3 : La fonction cube est représentée par une **cubique** symétrique par rapport à l'origine.

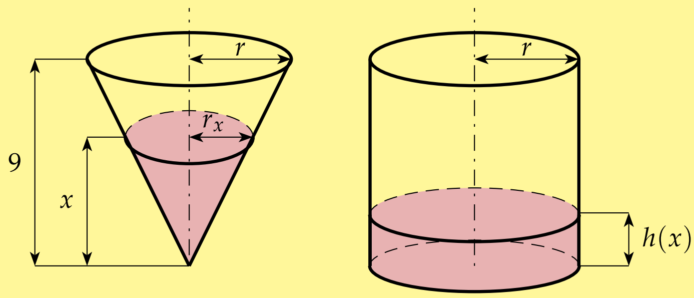
Remarque : La courbe admet un changement de concavité : elle est tournée vers le haut pour $x > 0$ (convexe) et tournée vers le bas pour $x < 0$ (concave).

Lorsque la fonction est **convexe**, la courbe est au-dessus de ses tangentes et lorsqu'elle est **concave**, la courbe est en-dessous de ses tangentes. À l'origine la courbe admet un **point d'inflexion**, c'est à dire qu'en O la tangente traverse la courbe.



5.3 Application

Deux éprouvettes E_1 de forme conique et E_2 de forme cylindrique ont les formes indiquées sur le dessin. L'unité de longueur est le cm.
On verse dans E_1 de l'eau jusqu'à une hauteur x, puis on transvase le contenu dans E_2 où l'eau atteint alors une hauteur, fonction de x notée $h(x)$.



1) Déterminer $h(x)$ en fonction de x.
2) Étudier la fonction h sur l'intervalle $[0\,;9]$.
3) Représenter la fonction h sur $[0\,;9]$.
4) Déterminer graphiquement la hauteur x de l'éprouvette E_1 pour avoir une hauteur dans le cylindre de 1 cm.
5) Peut-on remplir à demi E_2 en une seule fois ?

1) On rappelle que les volumes V_1 d'un cône et V_2 d'un cylindre tous deux de rayon r et de hauteur h sont de la forme :

$$V_1 = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad \text{et} \quad V_2 = \pi r^2 h$$

Dans un cône le rayon est proportionnel à la hauteur, le rayon r_x vérifie :

$$\frac{r_x}{r} = \frac{x}{9} \Leftrightarrow r_x = \frac{x\,r}{9}$$

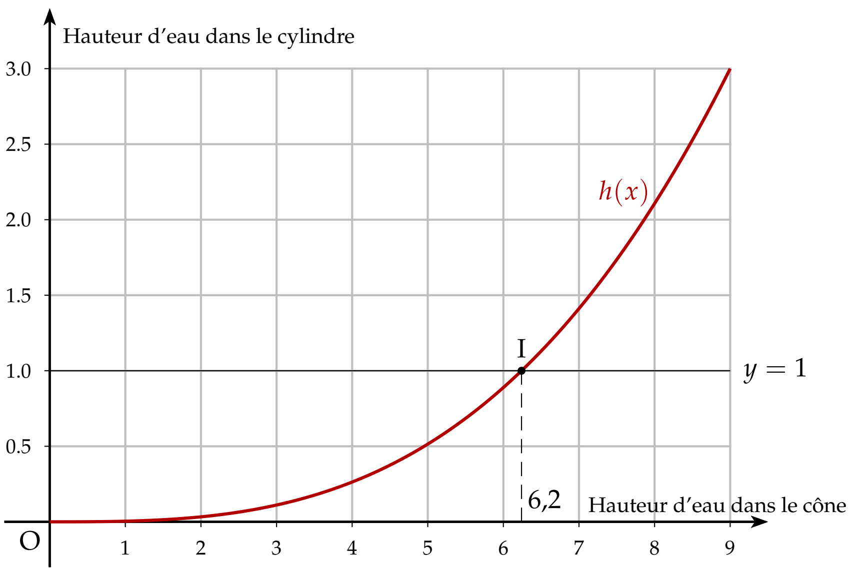
- Le volume V_1 d'eau dans le cône : $V_1 = \dfrac{\pi\, r_x^2\, x}{3} = \dfrac{\pi\left(\dfrac{x\,r}{9}\right)^2 x}{3} = \dfrac{\pi\, r^2 x^3}{243}$
- Le volume V_2 d'eau dans le cylindre : $V_2 = \pi\, r^2 h(x)$

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi\, r^2 x^3}{243} = \pi\, r^2 h(x) \Leftrightarrow h(x) = \frac{x^3}{243}$$

2) La fonction h est du type $h(x) = ax^3$ avec $a > 0$.
La fonction h a même variation que la fonction cube donc est croissante :

x	0	9
$h(x)$	0 $\nearrow$	3

3) On obtient la représentation suivante :



4) Pour avoir une hauteur d'eau de 1 cm dans le cylindre, on résout $h(x) = 1$.
À l'aide de la représentation on trouve alors : $x \approx 6,2$.
On doit donc avoir à peu près 6,2 cm d'eau dans le cône.

5) On ne peut remplir à demi le cylindre en une seule fois. En effet, le maximum de hauteur que l'on peut obtenir avec le cône plein à ras bord est de 3 cm.