La fonction carrée et la fonction inverse

Fonction carrée

EXERCICE 1

f est la fonction carrée. Calculer les images par f des nombres suivants :

1) 4 2) 100 3) 0 4) $-\dfrac{3}{4}$ 5) $0,1$

EXERCICE 2

f est la fonction carrée et $\mathscr{P}$ sa parabole représentative. Expliquer graphiquement puis algébriquement pourquoi :

1) il existe deux réels qui ont 4 comme image par f.
2) il n'existe pas d'image pour -1

EXERCICE 3

f est la fonction carrée. Déterminer les antécédents par f, lorsque cela est possible, de chacun des réels suivants :

1) 1 2) -4 3) 0 4) $\dfrac{5}{4}$ 5) 100

EXERCICE 4

Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe de la fonction carrée sur l'intervalle I en précisant la fenêtre utilisée :

1) $\mathrm{I} = [-0,3;0,3]$ 2) $\mathrm{I} = [100;1\,000]$

EXERCICE 5

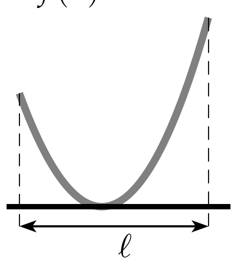
Citer la propriété de la fonction carrée qui permet d'affirmer sans calcul que :

1) $5,15 \leqslant 5,825 \quad \Rightarrow \quad 5,15^2 \leqslant 5,825^2$
2) $-3,52 \leqslant -3,07 \quad \Rightarrow \quad (-3,52)^2 \geqslant (-3,07)^2$

EXERCICE 6

1) Soit f la fonction carrée. Si $x \in [1\,;\,3]$ à quel intervalle appartient $f(x)$.
   On pourra s'aider d'un tableau de variation.
2) La schématisation d'une sculpture construite à l'aide de la fonction carrée est haute de 5 m d'un côté et de 3 m de l'autre.

   Calculer la valeur approchée au cm près de sa largeur ℓ.



EXERCICE 7

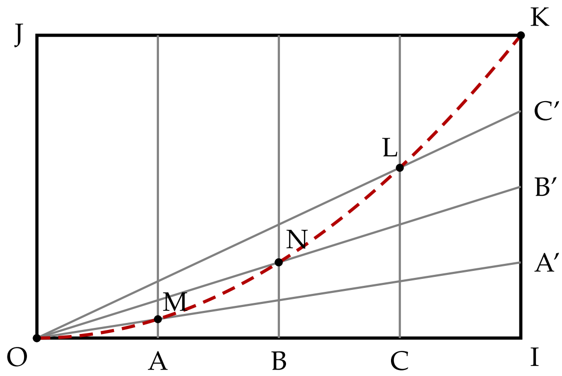
Construction d'une parabole

Voici un procédé utilisé par les tailleurs de pierres pour tracer une parabole sur un bloc rectangulaire.
Les points A, B, C sont tels que :

OA = AB = BC = CI

Les points A′, B′, C′ sont tels que :

IA′ = A′B′ = B′C′ = C′K



Justifier que O, M, N, L et K appartiennent à la courbe de la fonction carrée.
(Penser au théorème de Thalès)

Fonction trinôme

EXERCICE 8

Déterminer la forme canonique puis les variations des fonctions f suivantes :

1) $f(x) = x^2 - 4x + 1$
2) $f(x) = x^2 + x - 6$
3) $f(x) = x^2 + 6x + 12$
4) $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$
5) $f(x) = 3x^2 + 12x + 12$
6) $f(x) = -x^2 + 7x - 10$

EXERCICE 9

Soit l'algorithme suivant :

```
Choisir un nombre.
Lui ajouter 3.
Élever le résultat au carré.
Multiplier le résultat par −2.
Soustraire au résultat 4.
Afficher le résultat
```

1) Traduire cet algorithme à l'aide d'une fonction où le nombre de départ est x
2) Proposer un programme sur votre calculatrice.
3) Comment traduire la fonction $f(x) = 2(x-5)^2 + 6$ à l'aide d'un algorithme ayant la même structure que celui ci-dessus.

EXERCICE 10

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 3$.

1) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-2\,;2]$.
2) Afficher à l'écran de votre calculatrice la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;2]$. Conjecturer un élément de symétrie de cette courbe.
3) Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 11

Dans chaque cas, dresser le tableau de variation des fonctions trinôme suivantes :

1) $f_1(x) = 3(x-1)^2 - 4$
2) $f_2(x) = 4 - 3(x-1)^2$
3) $f_3(x) = -2x^2 + 7$
4) $f_4(x) = -5 + 3x^2$

EXERCICE 12

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$

1) Dresser le tableau de variation de f
2) Sans calcul, comparer, si possible :

   a) $f(-1)$ et $f(2)$ b) $f(1)$ et $f(4)$ c) $f(20)$ et $f(19.7)$

3) a désigne un réel de l'intervalle $]-\infty\,; 3]$. Comparer $f(a)$ et $f(a-1)$.

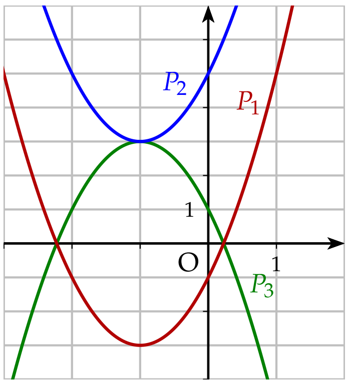
EXERCICE 13

Sans utiliser la calculatrice, associer à chacune des fonctions suivantes la représentation graphique qui lui correspond, en justifiant votre réponse.

$f(x) = -2(x+1)^2 + 3$

$g(x) = 2(x+1)^2 - 3$

$h(x) = 2(x+1)^2 + 3$



EXERCICE 14

Dans chaque cas, dire si la parabole, représentant la fonction f, est tournée « vers le haut » ou « vers le bas ». Donner les coordonnées du sommet et tracer sur votre calculatrice la parabole en adaptant la fenêtre.

1) $f_1(x) = -(x+2)^2 - 3$
2) $f_2(x) = \dfrac{25}{2} + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$
3) $f_3(x) = -4(x-3,5)^2 + 1,5$
4) $f_4(x) = 7 + x^2$

EXERCICE 15

Déterminer une fonction

f est une fonction du second degré et (P) sa parabole dans un repère orthogonal.

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'expression de $f(x)$.

1) (P) a pour sommet $\mathrm{S}(2\,; 3)$. Le point $\mathrm{A}(0\,; -1)$ appartient à (P).
2) (P) coupe l'axe des abscisses aux points $\mathrm{A}(-2\,; 0)$ et $\mathrm{B}(1\,; 0)$, et l'axe des ordonnées au point $\mathrm{C}(0\,; 2)$.
3) (P) admet pour axe de symétrie la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $\mathrm{A}(1\,; 0)$ et coupe l'axe des abscisses en l'origine O du repère et passe par le point $\mathrm{B}(3\,; 1)$.

EXERCICE 16

Résistance

Sur une Peugeot 406 1,6i, les variations de la résistance R (en Ω) de la sonde de «température d'eau» en fonction de la température T (en °C) du liquide dans le circuit de refroidissement sont données par :

$$R = 0,58T^2 - 116T + 6000 \quad (\text{avec } 0 \leqslant T \leqslant 150).$$

1) Vérifier que $R = 0,58(T-100)^2 + 200$.
2) Quel est le minimum de cette résistance ? A quelle température est-il atteint ?

EXERCICE 17

f est une fonction trinôme. On donne le tableau de variation suivant :

x	-3	1	5
$f(x)$	↗	$1{,}85$	↘ $-2{,}15$

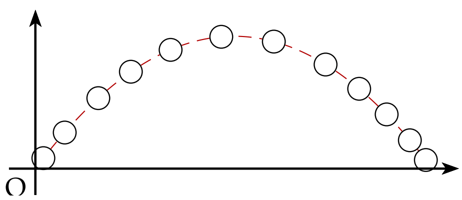
1) Que vaut $f(-3)$? Justifier
2) Donner l'expression de $f(x)$.

EXERCICE 18

Balle de ping-pong

L'objectif de cet exercice est de trouver l'expression de la fonction f associée à la trajectoire d'une balle de ping-pong.

- Partie de l'origine du repère, la balle arrive 150 cm plus loin sans filet.
- Elle s'élève de 50 cm.



1) Déterminer $f(x)$ sachant que f est une fonction du second degré.
2) Sachant que le filet est à 120 cm de l'origine et que sa hauteur est de 15,25 cm, la balle passe-t-elle au-dessus du filet ?

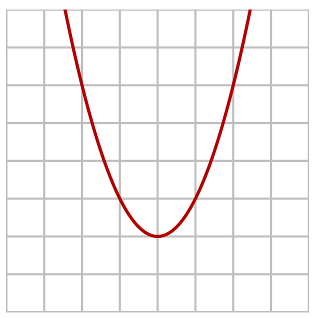
EXERCICE 19

Placer les axes

Marie a représenté ci-contre la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Marie a oublié de dessiner les axes du repère. Seriez vous capable de les replacer sur la figure ?



Fonction inverse

EXERCICE 20

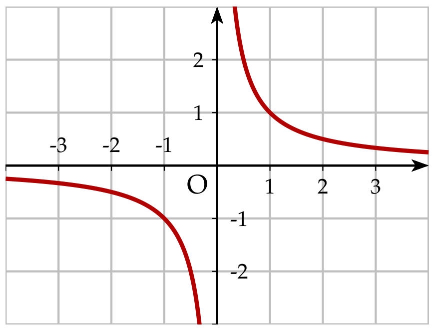
f est la fonction inverse. Calculer les images par f des réels suivants :

1) $\dfrac{5}{7}$ 2) $-\dfrac{1}{9}$ 3) $-\dfrac{3}{4}$ 4) $\dfrac{5}{8}$ 5) 10^{-6} 6) 10^{5}

EXERCICE 21

Voici la courbe représentative de la fonction inverse, dans un repère. Expliquer graphiquement :

1) Pourquoi n'existe-t-il qu'un seul réel dont l'inverse est 2. Quel est ce réel ?
2) Pourquoi n'existe-t-il qu'un réel dont l'inverse est -3. Quel est ce réel ?
3) Pourquoi n'existe-t-il pas de réel dont l'inverse est 0 ?



EXERCICE 22

f est la fonction inverse. Déterminer les antécédents par f de :

1) $\dfrac{4}{3}$ 2) $0,02$ 3) 10^{-5} 4) 2×10^{4}

Qu'applique-t-on comme fonction pour trouver ces antécédents ?

EXERCICE 23

Afficher sur l'écran de votre calculatrice, la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle I indiqué, en précisant la fenêtre utilisée.

1) $\text{I} = [-1; -0,1]$ 2) $\text{I} = [10, 100]$

EXERCICE 24

Citer la propriété de la fonction inverse qui permet d'affirmer sans calcul que :

1) $3,14 \leqslant 3,151 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{3,14} \geqslant \dfrac{1}{3,151}$

2) $-0,2 \leqslant -0,152 \quad \Rightarrow \quad -\dfrac{1}{0,2} \geqslant -\dfrac{1}{0,152}$

EXERCICE 25

Résoudre les inéquations suivantes en s'aidant de la courbe de la fonction inverse

1) $\dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{3}{4}$ 2) $\dfrac{1}{x} \leqslant -3$ 3) $\dfrac{1}{x} > -2$

EXERCICE 26

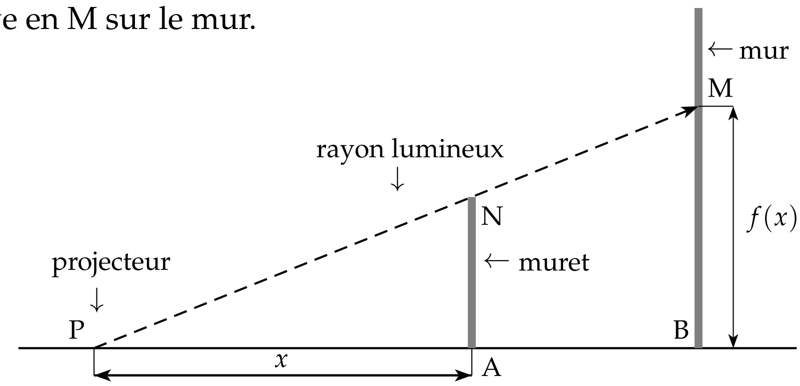
À l'intérieur d'un piston, la pression P en bars, et le volume V en litres, suivent la loi de Boyle-Mariotte : $P \times V = 1$.

1) Expliquer pourquoi cette loi est liée à la fonction inverse.
2) Sachant qu'à l'intérieur du piston, le volume peut varier entre 0,5 et 5 litres, quelles sont les valeurs possibles pour la pression ?

EXERCICE 27

Un petit muret

Un petit muret AN de 2 mètres de hauteur est situé à 3 mètres d'un mur BM.
Au sol un projecteur mobile est dirigé sur ce muret et le mur derrière ; l'ombre du muret arrive en M sur le mur.



1) Montrer, en utilisant le théorème de Thalès, que $\text{BM} = 2 + \dfrac{6}{\text{AP}}$
2) Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 2 + \dfrac{6}{x}$.
   a) Déterminer les variations de f sur $]0;+\infty[$ puis son tableau de variation.
   b) Recopier puis compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0,5	1	2	3	6	15
$f(x)$						

   c) Représenter f pour les valeurs de x situées dans l'intervalle $]0\,;\,15]$.
   On prendra comme unité le cm sur les deux axes.
3) Où positionner le projecteur afin qu'une marque située à 3,5 m de hauteur sur le mur ne soit jamais éclairée ? Plusieurs valeurs de x sont-elles possibles ?

EXERCICE 28

Fonctions homographiques et hyperboles

On a tracé sur la calculatrice les représentations des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies par :

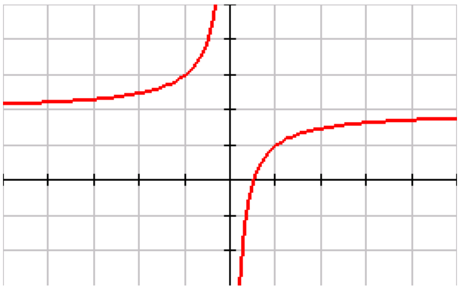
1) $f_1(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ 2) $f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ 3) $f_3(x) = -3 + \dfrac{1}{x}$ 4) $f_4(x) = -3 - \dfrac{1}{x}$

Associer chaque fonction à son graphique en justifiant sa réponse.

Graphique A

Graphique B

Graphique C



Graphique D

Algorithme

EXERCICE 29

Donner l'écriture de la fonction correspondante aux opérations suivantes

1) On prend l'inverse de la somme de x et de 2.
2) On ajoute 3 à l'inverse de x.
3) On ajoute 1 à l'inverse de la différence de x et de 5.

EXERCICE 30

Déterminer la fonction f associée aux programmes suivants :

```
def f(x):
    y=x-3
    y=4*y
    y=1/y
    return y
```

```
def f(x):
    y=5*x
    y=1/y
    y=y+5
    return y
```

EXERCICE 31

Pour chaque fonction donnée ci-dessous, donner un programme similaire aux programme de l'exercice précédent.

$f(x) = \dfrac{8}{x+3}$ $\qquad$ $g(x) = 3 + \dfrac{1}{7x+1}$

EXERCICE 32

x est un nombre de l'intervalle $[-3;-1]$

1) Compléter les programmes de calculs suivants en précisant à chaque étapes l'opération qui est faite.

$$x \xrightarrow[\dots]{} \frac{1}{x} \xrightarrow[\text{on multiplie par 3}]{} \dots \xrightarrow[\dots]{} 5+\frac{3}{x}$$

$$x \xrightarrow[\text{on multiplie par 2}]{} \dots \xrightarrow[\dots]{} 2x+1 \xrightarrow[\text{on prend l'inverse}]{} \dots$$

2) Utiliser ces programmes de calcul pour donner un encadrement des nombre :

$$A = 5+\frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{2x+1}$$

EXERCICE 33

x est un nombre de l'intervalle $[5\,;\,10]$
Procéder comme l'exercice précédent pour donner un encadrement des nombres :

$$M = \frac{5}{x-3} \qquad \text{et} \qquad N = 2-\frac{7}{x}$$

EXERCICE 34

Campagne de publicité

Partie A

Un entreprise souhaite promouvoir une nouvelle sorte de céréales pour le petit-déjeuner. L'entreprise estime qu'après x semaines de publicité, le pourcentage de personnes connaissant le nom de ces céréales est donné par :

$$p(x) = \frac{80x}{x+1}$$

1) Calculer $p(4)$. En déduire le pourcentage de personnes ignorant le nom du produit après quatre semaines de publicité.
2) L'écriture de $p(x)$ est-elle compatible avec les affirmations suivantes :
   a) Avant la campagne de pub, personne ne connaissait le nom de ces céréales.
   b) Après 15 semaines de pub, tout le monde connaît le nom de ces céréales.

Partie B

L'entreprise envisage une campagne de publicité de 10 semaines pour promouvoir ce produit.
On s'intéresse donc à la fonction p définie sur $[0\,;\,10]$.
Tracer la fonction p sur votre calculatrice. Prendre comme fenêtre graphique :

$$0 \leqslant X \leqslant 10 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant Y \leqslant 90 \quad \text{unité graphique : 1 pour } X \text{ et 10 pour } Y$$

Utiliser votre calculatrice pour répondre aux questions suivantes :

1) Déterminer graphiquement la durée nécessaire pour que le pourcentage $p(x)$ devienne supérieur ou égal à 60%.
2) Déterminer graphiquement combien de semaines supplémentaires de publicité sont nécessaires pour que ce pourcentage dépasse 70%.

3) Le directeur de marketing de cette entreprise affirme que la campagne de pub aura un fort impact pendant les trois premières semaines, et qu'au-delà, ce sera beaucoup plus limité.
Au vu du graphique, cette affirmation vous semble-t-elle justifiée ?

EXERCICE 35

Algorithme de Kuwarizmi

On donne l'algorithme suivant en pseudo-code

```
input(A,B)
Q=A/2
X=Q**2       #valeur X1
X=X+B        #valeur X2
X=sqrt(X)    #valeur X3
X=X-Q        #valeur X4
print(X)
```

1) Remplir le tableau suivant :

A	B	Q	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	Résultat
10	96						
8	2 009						

2) Proposer un algorithme en langage Python et retrouver les résultats du tableau.

3) Résoudre en utilisant la forme canonique les équations suivantes :
   a) $x^2 + 10x = 96$
   b) $x^2 + 8x = 2\,009$
   c) Expliquer ce que calcule cet algorithme
   d) Trouver alors, à l'aide du programme de votre calculatrice, la solution positive de l'équation : $x^2 - 84x = 3\,565$