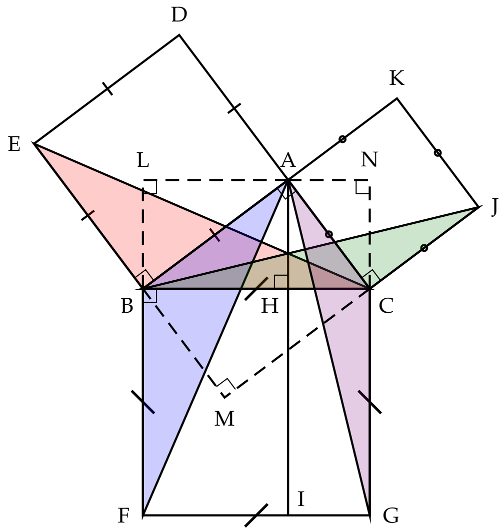
Démonstration du théorème de Pythagore



- Soit un triangle ABC rectangle en A.
- On construit les carrés ABED, BFGC et ACJK.
- La hauteur en A coupe [BC] en H et [FG] en I
- On considère les deux triangles BEC et ABF.
- Aire d'un triangle : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$.

1) Les triangle BEC et ABF possèdent deux côtés de même longueur et un angle de même mesure. En effet :

$$\text{EB} = \text{AB} \;,\; \text{BC} = \text{BF} \;\text{ et }\; \widehat{\text{CBE}} = \widehat{\text{ABC}} + 90° = \widehat{\text{ABF}}$$

Les triangle BEC et ABF sont donc isométriques (triangles de même dimension). Les aires des triangles BEC et ABF sont égales :

$$\mathscr{A}_{(\text{BCE})} = \frac{\text{BE} \times \text{CM}}{2} = \frac{\text{AB}^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}_{(\text{ABF})} = \frac{\text{BF} \times \text{AL}}{2} = \frac{\text{BC} \times \text{BH}}{2}$$

On déduit de $\mathscr{A}_{(\text{BCE})} = \mathscr{A}_{(\text{ABF})}$ que : $\text{AB}^2 = \text{BC} \times \text{BH} \quad (1)$

2) On considère maintenant les triangles : BCJ et ACG

Les triangle BCJ et ACG possèdent deux côtés de même longueur et un angle de même mesure. En effet :

$$\text{CJ} = \text{AC} \;,\; \text{BC} = \text{CG} \;\text{ et }\; \widehat{\text{BCJ}} = \widehat{\text{ACB}} + 90° = \widehat{\text{ACG}}$$

Les triangle BCJ et ACG sont isométriques. Les aires des triangles BCJ et ACG sont égales :

$$\mathscr{A}_{(\text{BCJ})} = \frac{\text{CJ} \times \text{BM}}{2} = \frac{\text{AC}^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{A}_{(\text{ACG})} = \frac{\text{CG} \times \text{AN}}{2} = \frac{\text{BC} \times \text{HC}}{2}$$

On déduit de $\mathscr{A}_{(\text{BCJ})} = \mathscr{A}_{(\text{ACG})}$ que : $\text{AC}^2 = \text{BC} \times \text{HC} \quad (2)$

3) De (1) et (2) on a :

$$\begin{aligned} \text{BC} \times \text{BH} + \text{BC} \times \text{HC} &= \text{AB}^2 + \text{AC}^2 \\ \text{BC}(\text{BH} + \text{HC}) &= \text{AB}^2 + \text{AC}^2 \\ \text{BC}^2 &= \text{AB}^2 + \text{AC}^2 \end{aligned}$$