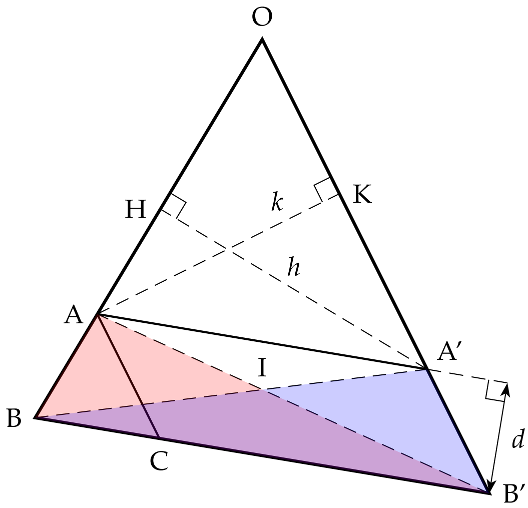
Démonstration du théorème de Thalès

- Soit deux droites (AB) et (A′B′) sécantes en O telles que (AA′) // (BB′).
- Soit I l'intersection des droites (A′B) et (B′A).
- Soit les droites (A′H) et (AK) respectivement perpendiculaires aux droites (OB) et (OB′).
- Soit d la distance entre (AA′) et (BB′)
- Aire d'un triangle : $\mathscr{A} = \dfrac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$



1) **Montrons que les aires des triangles AIB et A′IB′ sont égales**

Le quadrilatère ABB′A′ est un trapèze car (AA′) // (BB′).

On considère les triangles AB′B et A′BB′. Ces deux triangles ont une base commune [BB′] et une même hauteur associée d (hauteur du trapèze).
Donc AB′B et A′BB′ ont donc la même aire : $\mathscr{A}_{\text{AB'B}} = \mathscr{A}_{\text{A'BB'}}$ (1)

or les triangles AIB et BIB′ d'une part, A′IB′ et BIB′ d'autre part partitionnent les triangles respectifs AB′B et A′BB′. La relation (1) devient alors :

$$\mathscr{A}_{\text{AIB}} + \mathscr{A}_{\text{BIB'}} = \mathscr{A}_{\text{A'IB'}} + \mathscr{A}_{\text{BIB'}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{A}_{\text{AIB}} = \mathscr{A}_{\text{A'IB'}}$$

2) **Montrons la première égalité du théorème de Thalès :**

- Les triangles OAA′ et OBA′ ont un même hauteur A′H $= h$.

  On a alors : $\mathscr{A}_{\text{OAA'}} = \dfrac{\text{OA} \times h}{2}$ et $\mathscr{A}_{\text{OBA'}} = \dfrac{\text{OB} \times h}{2}$.

  On en déduit le rapport de ces deux aires : $\dfrac{\mathscr{A}_{\text{OAA'}}}{\mathscr{A}_{\text{OBA'}}} = \dfrac{\text{OA}}{\text{OB}}$ (2)

- Les triangles OAA′ et OAB′ ont un même hauteur AK $= k$.

  On a alors : $\mathscr{A}_{\text{OAA'}} = \dfrac{\text{OA'} \times k}{2}$ et $\mathscr{A}_{\text{OAB'}} = \dfrac{\text{OB'} \times k}{2}$.

  On en déduit le rapport de ces deux aires : $\dfrac{\mathscr{A}_{\text{OAA'}}}{\mathscr{A}_{\text{OAB'}}} = \dfrac{\text{OA'}}{\text{OB'}}$ (3)

- D'après l'égalité (1)

$$\left.\begin{array}{l} \mathscr{A}_{\text{OBA'}} = \mathscr{A}_{\text{OAA'}} + \mathscr{A}_{\text{AIA'}} + \mathscr{A}_{\text{AIB}} \\ \mathscr{A}_{\text{OAB'}} = \mathscr{A}_{\text{OAA'}} + \mathscr{A}_{\text{AIA'}} + \mathscr{A}_{\text{A'IB'}} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \mathscr{A}_{\text{OBA'}} = \mathscr{A}_{\text{OAB'}}$$

- Les rapports (2) et (3) sont alors égaux, donc : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'}$

3) **Montrons la dernière égalité du théorème Thalès**

Menons en A la parallèle à (OB′), elle coupe (BB′) en C.

On peut utiliser la première égalité du théorème de thalès dans les triangles BAC et BOB′ car (AC) // (OB′). On obtient alors :

$$\frac{BA}{BO} = \frac{BC}{BB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BO - AO}{BO} = \frac{BB' - CB'}{BB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AO}{BO} = \frac{CB'}{BB'} \quad (4)$$

Comme (AA′) // (BB′) et (AC) // (A′B′) le quadrilatère ACB′A′ est un parallélogramme donc : $CB' = AA'$

Le rapport (4) vaut donc : $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{AA'}{BB'}$