Géométrie plane et configurations

1 Les quadrilatères

1.1 Le parallélogramme

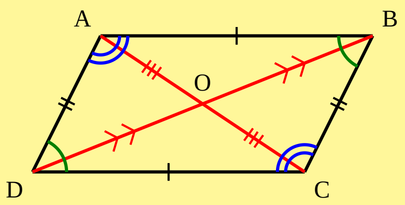
Définition 1 Un parallélogramme est un quadrilatère dont :

1) les côtés opposés sont deux à deux parallèles.
2) les côtés opposés sont deux à deux de même longueur.
3) deux côtés sont parallèles et de même longueur.
4) les diagonales se coupent en leur milieu.
5) deux angles consécutifs quelconques sont supplémentaires.
6) les angles opposés sont égaux deux à deux.

Ces six définitions sont équivalentes

Relation vectorielle :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$



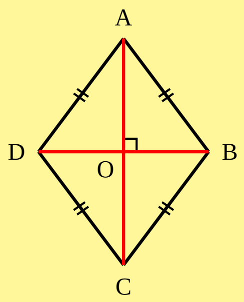
1.2 Le losange

Définition 2
Un losange est un quadrilatère dont :

1) les 4 côtés sont de même longueur.
2) les diagonales se coupent en leur milieu perpendiculairement.

Un losange est un parallélogramme dont :

1) deux côtés consécutifs sont de même longueur.
2) les digonales sont perpendiculaires



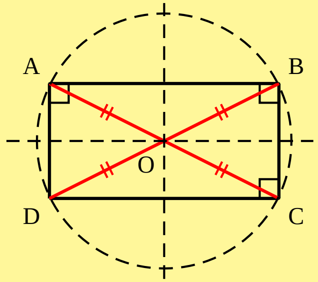
1.3 Le rectangle

Définition 3
Un rectangle est un quadrilatère

1) qui a trois angles droits.
2) dont les diagonales sont de même longueur et qui se coupent en leur milieu.

Un rectangle est un parallélogramme

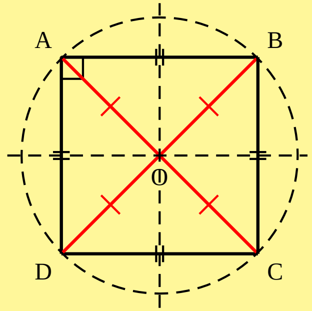
1) qui a 1 angle droit.
2) dont les diagonales sont de même longueur.



1.4 Le carré

Définition 4

1) Un carré est un losange et un rectangle.
2) Un carré est un quadrilatère qui a ses 4 côtés de même longueur et 1 angle droit.
3) Un carré est un quadrilatère dont les diagonales de même longueur, se coupent en leur milieu perpendiculairement.



1.5 Le trapèze

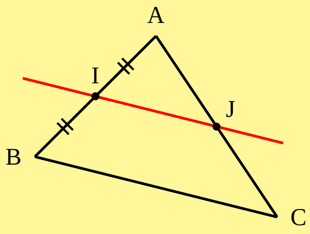
Définition 5

1) Un trapèze est un quadrilatère qui a 2 côtés parallèles.
2) Un trapèze rectangle est un trapèze qui possède un angle droit.
3) Un trapèze isocèle est un trapèze qui possède un axe des symétrie.

2 Le triangle

2.1 Le théorème des milieux

Théorème 1
Le théorème direct
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.



$\mathrm{I} = m[\mathrm{AB}]$ et $(\mathrm{IJ})//(\mathrm{BC}) \Rightarrow$

$$\mathrm{J} = m[\mathrm{AC}] \text{ et } \mathrm{IJ} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

La réciproque
Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.

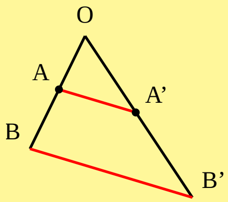
$$\mathrm{I} = m[\mathrm{AB}] \text{ et } \mathrm{J} = m[\mathrm{AC}] \Rightarrow (\mathrm{IJ})//(\mathrm{BC}) \text{ et } \mathrm{IJ} = \frac{1}{2}\mathrm{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

2.2 Le théorème de Thalès

Théorème 2 :

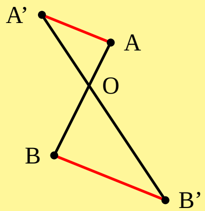
Le théorème direct
Soit deux droites (AB) et (A'B') sécante en O.

Si (AA')//(BB') alors $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB'}} = \dfrac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{BB'}}$



La réciproque
Soit O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part alignés dans cet ordre.

Si $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \dfrac{\mathrm{OA'}}{\mathrm{OB'}}$ alors, on a : (AA')//(BB')

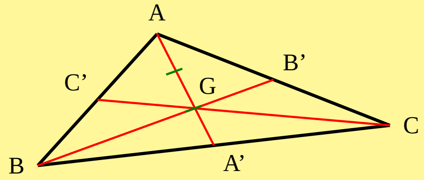


2.3 Droites remarquables

Définition 6

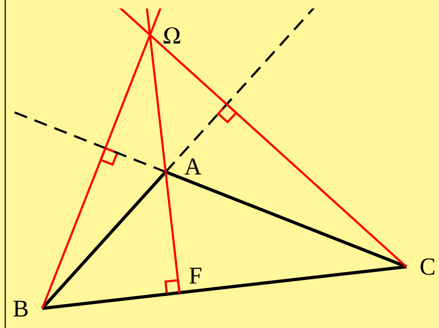
1) Une **médiane** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Propriété : Les trois médianes sont concourantes en G **centre de gravité**. Il est situé au deux tiers du sommet ou à un tiers de la base.



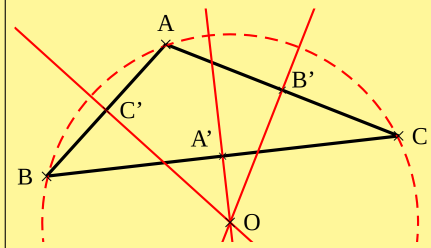
2) Une **hauteur** d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

Propriété : les trois hauteurs sont concourantes en Ω l'**orthocentre**.



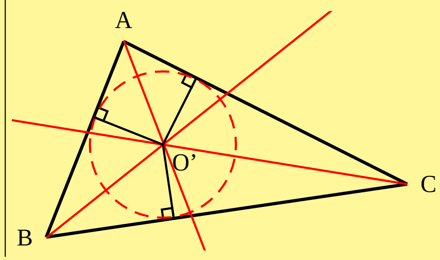
3) La **médiatrice** d'un segment [AB] est la droite dont les points sont équidistants des points A et B. Elle coupe alors ce segment en son milieu perpendiculairement.

Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourante en O centre du **cercle circonscrit**.



4) La **bissectrice** d'un angle divise celui-ci en deux parties égales.

Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point O' centre du **cercle inscrit**.

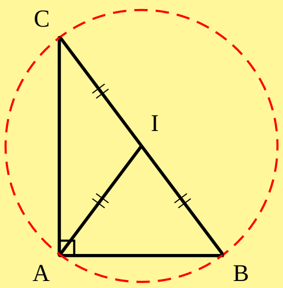


2.4 Le triangle rectangle

Théorème 3

Centre du cercle circonscrit
Le centre du cercle circonscrit dans un triangle rectangle se trouve au milieu de l'hypoténuse.

Réciproquement, le triangle ABC inscrit dans un cercle de diamètre $[BC]$ est rectangle en A



Thérorème de Pythagore
Si ABC est rectangle en A, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$
Réciproque
Si le triangle ABC est tel que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A

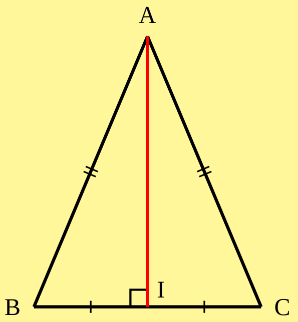
2.5 Le triangle isocèle

Définition 7

Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si : AB = AC

Propriétés

1) la mediane et la hauteur issues de A, la médiatrice de [BC] et la bissectrice de $\hat{A}$ sont confondues. La hauteur issue de A coupe donc [BC] en son milieu.
2) $\widehat{B} = \widehat{C}$
3) (AH) est un axe de symétrie du triangle ABC.



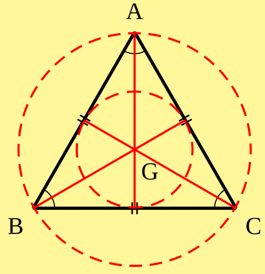
2.6 Le triangle équilatéral

Définition 8

Un triangle est équilatéral si et seulement si ses trois côtés sont de même longueur.

Les angles du triangle valent à $\dfrac{\pi}{3}$

Les médianes, les hauteurs, les médiatrices et les bissectrices sont confondues.



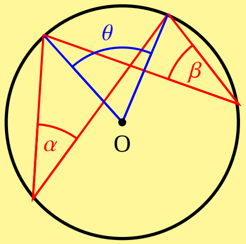
Dans un triangle équilatéral de côté a :

1) Les quatre centres du triangle sont donc confondus.
2) les trois médianes ou médiatrices ou hauteurs ou bissectrices sont axes de symétrie du triangle ABC.
3) la longueur d'une hauteur est égal à : $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

2.7 Angles dans un cercle

Théorème 4

1) Dans un cercle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit. On a alors :
$$\theta = 2\alpha$$
2) Dans un cercle, deux angles qui interceptent le même arc sont égaux. On a alors :
$$\alpha = \beta$$



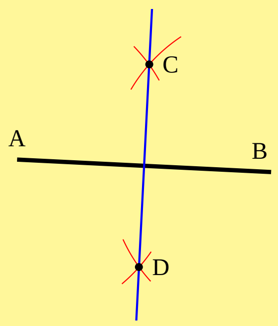
3 Construction dans le plan

Réalisation d'une figure à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

3.1 Médiatrice

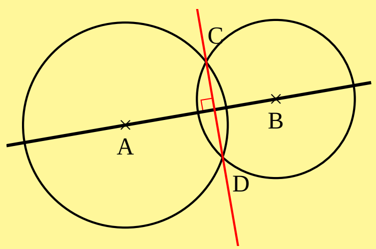
La médiatrice d'un segment [AB] est la droite dont les points sont équidistants des points A et B.

Intérêt : Permet de déterminer le milieu d'un segment sans utiliser une règle graduée ou de tracer une perpendiculaire à une droite donnée sans utiliser une équerre.



Exemple : Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par un point C extérieur à cette droite.

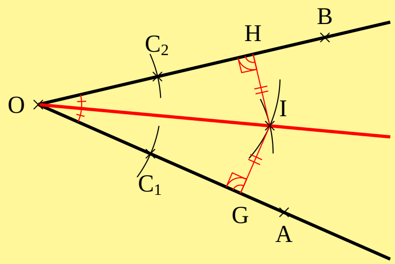
On reporte la distance AC et la distance BC à partir respectivement de A et B. On obtient ainsi un point D. Comme A et B sont équidistants de C et D, la droite (AB) est la médiatrice de [CD] donc (AB)⊥(CD)



3.2 Bissectrice

Les points de la bissectrice sont équidistants des deux demi-droites qui compose l'angle. Cette propriété permet de tracer la bissectrice d'un angle à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

Intérêt : Permet de tracer des angles de 30˚ou 45˚.



Pour déterminer le point I de la bissectrice de $\widehat{AOB}$, on reporte à partir de O une même distance. On obtient ainsi les points C_1 et C_2. A partir de ces deux points, on reporte une même distance pour obtenir le point I.

3.3 Parallélogramme

Exemple : Tracer la parallèle à une droite (AB) donnée passant par un point extérieur C à cette droite.

Tracer cette droite revient à tracer le point D tel que ABDC soit un parallélogramme. On reporte donc la distance AC à partir de B et la distance AB à partir de C. On obtient ainsi le point D. La droite cherchée est la droite (CD).