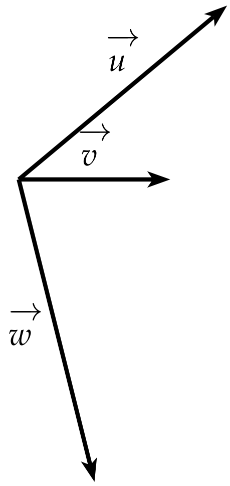
Vecteurs. Géométrie analytique

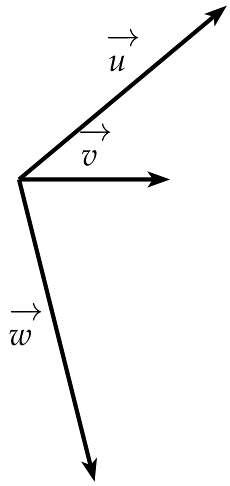
Addition de deux vecteurs

EXERCICE 1

On donne trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$. Sur les deux figures suivantes tracer la somme $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ de deux manières :

- $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})+\overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u}+(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w})$





EXERCICE 2

1) Simplifier les écritures suivantes en utilisant la relation de Chasles.

   a) $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$

   b) $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$

   c) $\vec{w}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{AB}$

2) Démontrer que pour tous points A, B et C : $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

3) ABCD est un parallélogramme et M un point quelconque. Démontrer que :

$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{0}$$

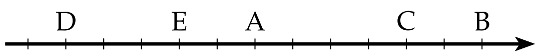
EXERCICE 3

ABC est un triangle. Réduire l'écriture du vecteur $\vec{u}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$

Multiplication par un scalaire

EXERCICE 4

Les point A, B, C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous. Dans chaque cas, trouver le nombre réel k tel que $\vec{v}=k\,\vec{u}$



1) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AE}$

2) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AE}$

3) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

4) $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$

EXERCICE 5

ABC est un triangle.

1) Placer les points D et E tels que : $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
2) Trouver le nombre k tel que : $\overrightarrow{DE} = k\,\overrightarrow{AB}$

EXERCICE 6

ABC est un triangle.

1) Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
   Prouver que [AD] et [BC] ont même milieu.
2) Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$
   Prouver que C est le milieu de [ED].
3) Les droites (AD) et (BE) se coupent en I. Que représente I pour le triangle ABC ?
   Prouver que : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BE}$.

Placement de points

EXERCICE 7

A et B sont deux points tels que AB = 6 cm. Placer les points M et N définis par les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}$$

EXERCICE 8

A et B sont deux points distincts donnés. Placer les points M, N, P et Q tels que :

a) $\overrightarrow{AM} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{BP} = -\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

EXERCICE 9

[AB] est un segment de longueur 8 cm.
Placer le point M tel que : $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

EXERCICE 10

(AB) est une droite. Prendre AB = 2 cm. Les points M et N sont tels que :

$$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad -2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}$$

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer M.
2) Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$. Placer N.
3) I est le milieu de [AB].
   Exprimer $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   Déduire que I est aussi le milieu de [MN].

Colinéarité

EXERCICE 11

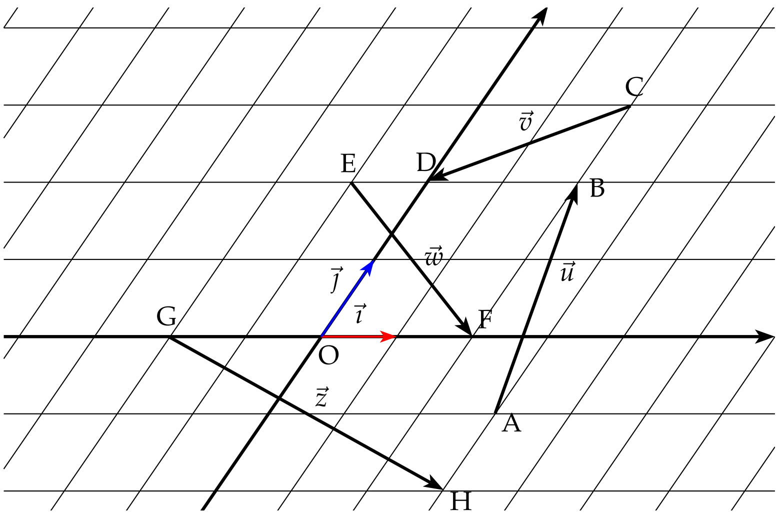
ABC est un triangle, E un point tel que : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I un point tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F un point tel que : $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1) Faire une figure. On prendra AB = 5 cm, BC = 6 cm et AC = 7,5 cm.
2) Montrer que : $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{IF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$.
3) En déduire que les points I, E et F sont alignés.

Repère quelconque

EXERCICE 12

a) Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H
b) Dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$.



EXERCICE 13

ABC est un triangle, I est le milieu de [BC] et J le milieu de [AI]. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1) Calculer les coordonnées de I et J.
2) Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB} + 2\overrightarrow{JC}$

EXERCICE 14

ABCD est un rectangle.

a) Faire une figure et placer les points I, J, K et L tels que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}, \quad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

b) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$, exprimer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère IJKL.

d) Démontrer que le centre du rectangle est aussi le milieu du segment [IK].

EXERCICE 15

Repère orthonormal

Les points A, B et C sont tels que : $A(-2;-3)$, $B(5;0)$ et $C(0;7)$. G est le centre de gravité du triangle ABC.

1) a) Calculer les coordonnées du milieu I de [BC].

   b) Quel est le nombre k tel que $\overrightarrow{AG} = k\overrightarrow{AI}$?

   c) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$. En déduire celles de $\overrightarrow{AG}$ puis celles de G.

2) Prouver que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$

Colinéarité et déterminant

EXERCICE 16

Dans chaque cas, dire si les vecteurs sont colinéaires :

a) $\vec{u}(2;-3)$ $\vec{v}\left(-1;-\frac{1}{3}\right)$

b) $\vec{u}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$ $\vec{v}\left(\frac{6}{5};\frac{4}{5}\right)$

EXERCICE 17

Dans chaque cas, déterminer le réel m pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires

a) $\vec{u}(2;6)$ $\vec{v}(m;3)$

b) $\vec{u}(-m;0)$ $\vec{v}(1;-3)$

c) $\vec{u}(27;2m)$ $\vec{v}(2m;3)$

EXERCICE 18

1) On donne les points suivants : $A(2;3)$, $B(5;7)$ et $C(-6;-8)$.
   Les points A, B, C sont-ils alignés ?

2) On donne les points suivants : $A(-2;2)$, $B(1;5)$, $C(-1;-2)$ et $D(7;6)$.
   Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 19

Dans les cas suivants, les point M, N et P sont-il alignés ?

1) $M(4;-1)$, $N(7;-3)$, $P(-5;5)$
2) $M(-2;3)$, $N(-3;7)$, $P(-5;14)$
3) $M\left(2,-\dfrac{1}{3}\right)$, $N(3;-1)$, $P(0;1)$

Géométrie analytique

Exercice 20

Dans un repère orthonormal, $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ on considère les points : $A(-4;2)$, $B(-2;-4)$, $C(5,-3)$ et $D(4;6)$. On appelle I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1) Placer les points A, B, C, D.
2) Calculer les coordonnées des points I, J, K, et L. Placer les points I, J, K et L.
3) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{LK}$. Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ?
4) Calculer les longueurs IJ et IL et JL. Le quadrilatère IJKL est-il un rectangle ? Pourquoi ?

Exercice 21

Le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormal. On donne les points suivants :

$$A(-4;-1), \quad B(4;-2), \quad C(8;5), \quad D(0;6)$$

1) a) Démontrer que [AC] et [BD] ont même milieu.
   b) Calculer les distances AB et BC
2) En déduire la nature du quadrilatère ABCD

Exercice 22

Soit un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ orthonormé.
Le but de cet exercice est de trouver les coordonnées du point d'intersection M des droite (AB) et (CD).

1) Placer les points $A\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$, $B\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$, $C\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$ et $D\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{1}{2}\right)$
2) a) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$
   b) Prouver que les droites (AB et (CD) sont sécantes.
3) On appelle k le réel tel que : $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
   a) Exprimer les coordonnées de M en fonction de k.
   b) Calculer mes coordonnées de $\overrightarrow{CM}$ en fonction de k.
   c) En utilisant la condition de colinéarité entre les vecteurs $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CD}$, calculer k.
   d) En déduire les coordonnées du point M.

EXERCICE 23

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle de centre $I(2;-1)$ et de rayon 5.

On donne les points $A(5;3)$, $B(-3;-2)$, $C\left(4;\dfrac{7}{2}\right)$ et $D\left(3;-1+2\sqrt{6}\right)$.

1) Calculer les longueurs IA, IB, IC, ID.
2) Quels sont les points qui appartiennent au cercle $\mathscr{C}$?

EXERCICE 24

Dans un repère, on donne les points : $M(0;-3)$, $N(2;3)$, $P(-9;0)$ et $Q(-1;-1)$

a) Calculer les coordonnées des points A et B tels que :

$$\overrightarrow{NA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MQ}$$

b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PA}$ et $\overrightarrow{PB}$
c) Démontrer que les points P, A et B sont alignés.

EXERCICE 25

Dans un repère, on donne les points : $A(1;-1)$, $B(-1;-2)$ et $C(-2;2)$

a) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
b) Déterminer les coordonnées du points D vérifiant : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$
c) Faire une figure. Que peut-on conjecturer pour les points B, G et D ?
   Démontrer cette conjecture.

EXERCICE 26

Dans un repère orthonormé, on donne les points : $A(-1;2)$, $B(7;-8)$ et $E(7;2)$

a) Démontrer que le point E appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].
b) Déterminer les coordonnées du point F, symétrique de E par rapport au centre I du cercle $\mathscr{C}$.
c) Quelle est la nature que quadrilatère AEBF