Géométrie vectorielle et analytique dans le plan

1 Vecteur

La notion de vecteur découle de la représentation d'une force en physique à la seule différence qu'une force possède un point d'application.

1.1 Définition

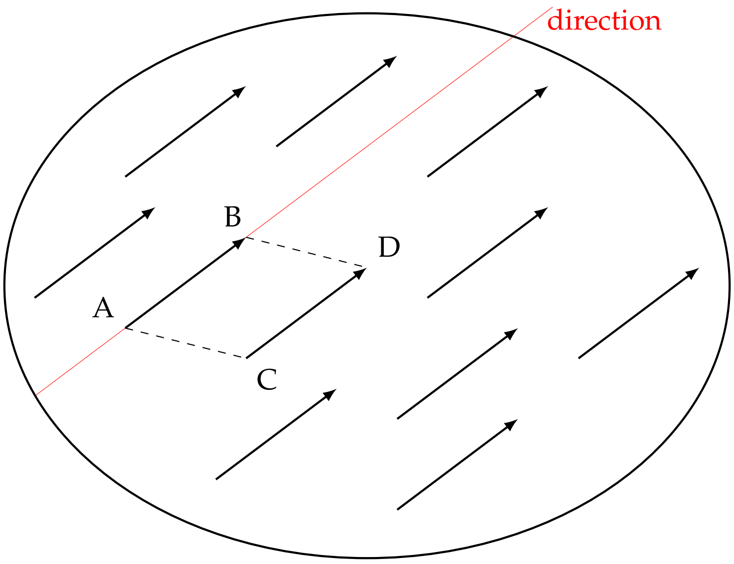
Un vecteur géométrique, noté $\vec{u}$, est un outil mathématique caractérisé par :

- une direction (la droite support du vecteur) ;
- un sens, (sens de parcours sur la droite) ;
- une longueur, la norme du vecteur, notée $||\vec{u}||$.

Remarque : Un vecteur n'a pas de point d'application dans le plan.

Pour pouvoir le représenter dans le plan, on prend un représentant du vecteur $\vec{u}$ à l'aide de deux points A et B, qui possèdent les mêmes caractéristiques de direction, de sens et de longueur. On appelle alors ce représentant un bipoint et on le note $\overrightarrow{AB}$.

Un vecteur représente l'ensemble de ses représentants (classe d'équivalence).



Représentation du vecteur $\vec{u}$

⚠ Par abus de langage, dans la suite, on appellera indifféremment vecteur : $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$.
On écrira alors : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond alors à la distance AB : $||\overrightarrow{AB}|| = AB$.

1.2 Égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, ssi le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \text{ABDC est un parallélogramme}$$

Remarque : Un parallélogramme est associé à l'égalité de deux vecteurs, car un vecteur possède deux informations une sur la direction et une autre sur la longueur ce qui caractérise deux côtés parallèles et de même longueur.

Un parallélogramme, vu sous l'angle vectoriel, montre la simplicité de l'outil vectoriel qui en fait toute sa richesse.

2 Opérations sur les vecteurs

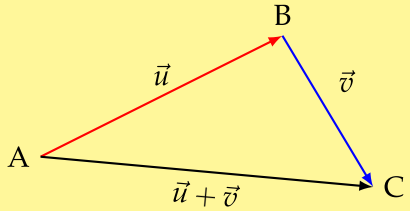
Les opérations sur les vecteurs représentent un progrès réel par rapport à la géométrie euclidienne pour sa simplicité d'emploi et sa forme très synthétique. Elles simplifient alors les démonstrations.

2.1 Addition de deux vecteurs

Relation de Chasles

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ de représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. On définit l'addition des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\vec{v}$ par la relation :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \text{d'où} \quad \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$$



Remarque : Cette opération peut toujours se faire car l'on peut toujours déplacer le deuxième vecteur pour qu'il commence où finit le premier.

La norme de la somme n'est pas la somme des normes en général :

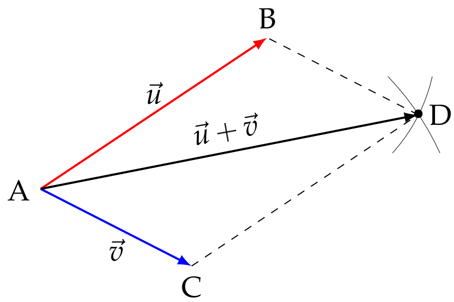
$$||\vec{u} + \vec{v}|| \leqslant ||\vec{u}|| + ||\vec{v}|| \quad \text{inégalité triangulaire}$$

2.2 Somme de deux vecteurs de même origine

On utilise la configuration du parallélogramme pour additionner deux vecteurs de même origine

ABDC parallélogramme, alors $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$, et donc :

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \overset{\text{Chasles}}{=} \overrightarrow{AD}$$



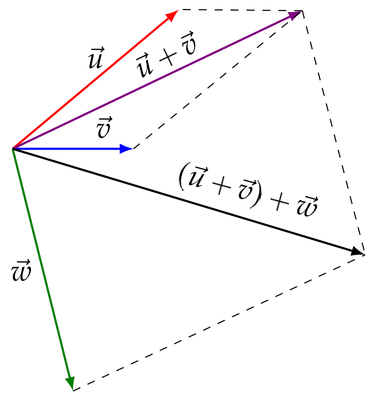
2.3 Propriétés de l'addition de deux vecteurs

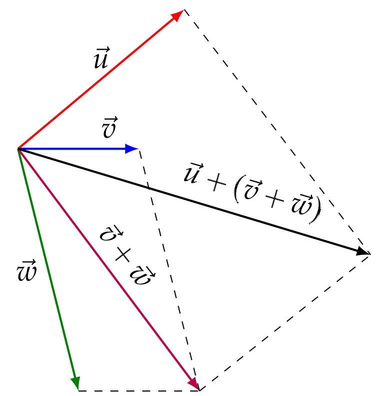
L'addition de deux vecteurs :

- est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$;
- est associative : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$;
- possède un élément neutre : $\overrightarrow{0}$.
- Tout vecteur $\vec{u}$ possède un opposé, noté $-\vec{u}$

Remarques : On retrouve les mêmes propriétés que possède l'addition de deux réels

- La commutativité se vérifie dans la configuration du parallélogramme. L'ordre des vecteurs est bien indifférent.
- On peut visualiser l'associativité par les figures ci-après : additionner les deux premiers au troisième revient à additionner le premier avec les deux derniers.





- D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$
  On décide d'appeler un vecteur de longueur nulle, le vecteur nul, noté : $\overrightarrow{0}$.
  ⚠ Le vecteur $\overrightarrow{0}$ n'a pas de direction.
- On décide de noter : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$.

2.4 Applications de la relation de Chasles

Simplification : Pour tous points O, A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

Montrer une propriété :

ABCD parallélogramme, montrer pour tout point M que : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$

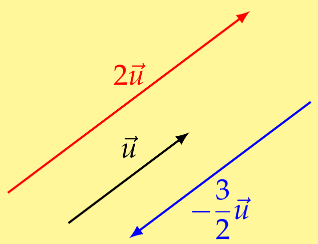
ABCD parallélogramme alors $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, on a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC}\\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} \overset{\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}}{=} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

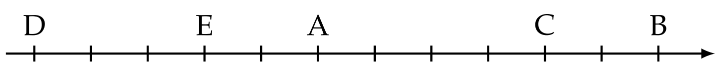
2.5 Multiplication par un réel

Soit un vecteur $\vec{u}$ et un réel k. Le vecteur $k\vec{u}$ est tel que :

- La longueur de $\vec{u}$ est multiplié par $|k|$: $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$
- Si $k > 0$ même direction et même sens que $\vec{u}$
- Si $k < 0$ même direction et sens contraire à $\vec{u}$
- Si $k = 0$ $0\,\vec{u} = \overrightarrow{0}$



Les points A, B C, D et E sont définis sur la droite graduée ci-dessous.



On a alors les relations : $\overrightarrow{AB} = -3\,\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AD} = \dfrac{5}{2}\,\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CD} = -\dfrac{3}{2}\,\overrightarrow{AB}$

2.6 Propriétés de la multiplication par un réel

La multiplication d'un vecteur par un scalaire, obéit à la bilinéarité, c'est à dire :

$$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\,\vec{u} + k\,\vec{v} \quad \text{et} \quad (k+k')\,\vec{u} = k\,\vec{u} + k'\,\vec{u}$$

Remarque : Ces deux propriétés permettent de développer des expressions vectorielles comme des équations numériques. Elles permettent alors de résoudre des équations vectorielles, c'est à dire permettent à la géométrie d'avoir accès à la performance de l'algèbre.

On peut généraliser les propriétés de l'addition et de la multiplication par un réel à d'autres ensembles que le plan vectoriel. Les ensembles munie d'une addition et d'une multiplication par un réel, ayant les mêmes propriétés que les vecteurs géométriques, porte le nom d'**espace vectoriel** et ses éléments sont appelés vecteurs. Par exemple l'ensemble des fonctions affines est un espace vectoriel. Cette structure d'espace vectoriel joue un rôle très important dans les mathématiques actuelles.

2.7 Application

A et B sont deux points tels que AB = 6 cm.
Placer les points M et N définis par les relations suivantes :

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \quad \text{et} \quad 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \vec{0}$$

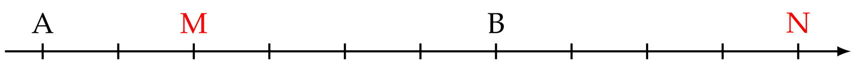
On exprime les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Pour le point M

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{AM} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{AM} &= -\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Pour le point N

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{NA} - 5(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}) &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{AN} - 5\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ -3\overrightarrow{NA} &= 5\overrightarrow{AB} \\ 3\overrightarrow{AN} &= 5\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$



Remarque : On pourrait, tout autant, privilégier le point B et exprimer $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{BA}$. On obtiendrait alors :

$$\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$$

3 Colinéarité de deux vecteurs

3.1 Définition et théorème

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** si, et seulement si :

$$\exists\, k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \vec{v} = k\,\vec{u}$$

Remarque : Cela découle directement de la définition du produit d'un vecteur par un réel, car $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont même direction.

⚠ On ne parle pas de parallélisme pour des vecteurs car un vecteur n'a pas de point d'application seulement une direction.

Parallélisme et alignement

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires c'est à dire que :

$$(AB) \,//\, (CD) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{CD} = k\,\overrightarrow{AB}$$

- Les point A, B et C sont **alignés** si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires c'est à dire que :

$$A,\ B,\ C \text{ alignés} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$$

3.2 Applications

- ABC est un triangle et P le point défini par : $5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

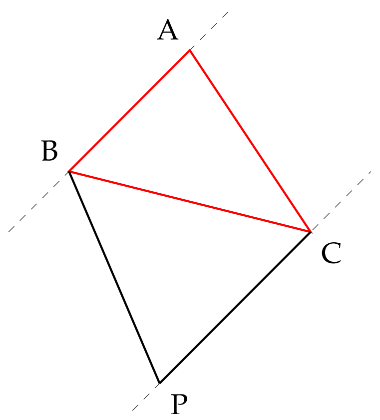
Montrer que ABPC est un trapèze.

Pour montrer que ABPC est un trapèze, il faut montrer que les droites (CP) et (AB) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad 4\overrightarrow{PC} = -5\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow$

$-4\overrightarrow{CP} = -5\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CP} = \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AB}$

Les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, donc les droites (CP) et (AB) sont parallèles et donc ABPC est un trapèze.



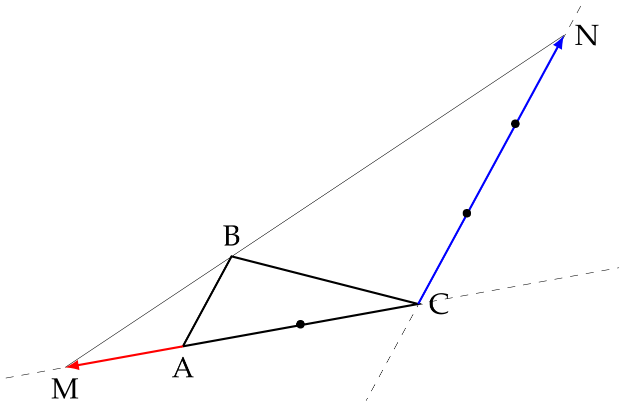
- ABC est un triangle. M et N sont les points tels que : $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$

Placer les point M et N puis montrer que les points B, M et N sont alignés.

On place les point M et N à l'aide des relations : $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$

On obtient la figure ci-après :

Les points B, M et N sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BN}$ sont colinéaires.
Pour cela, on exprime ces deux vecteurs à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On a alors :



$$\begin{aligned}\overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} \quad \overset{\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}{\Leftrightarrow}\\ \overrightarrow{BM} &= -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow\\ -2\overrightarrow{BM} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

De même

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \quad \overset{\overrightarrow{CN}=3\overrightarrow{AB}}{\Leftrightarrow} \quad \overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

On obtient alors la relation : $\overrightarrow{BN} = -2\overrightarrow{BM}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires et donc les points M, B et N sont alignés.

4 Repères

4.1 Repère quelconque

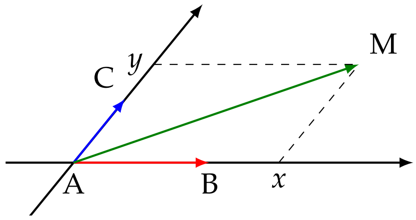
On peut définir un repère par :

- Trois points A, B , C non alignés : repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Un point origine O et deux vecteurs non colinéaire $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$: repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On repère un point M du plan par les relations :

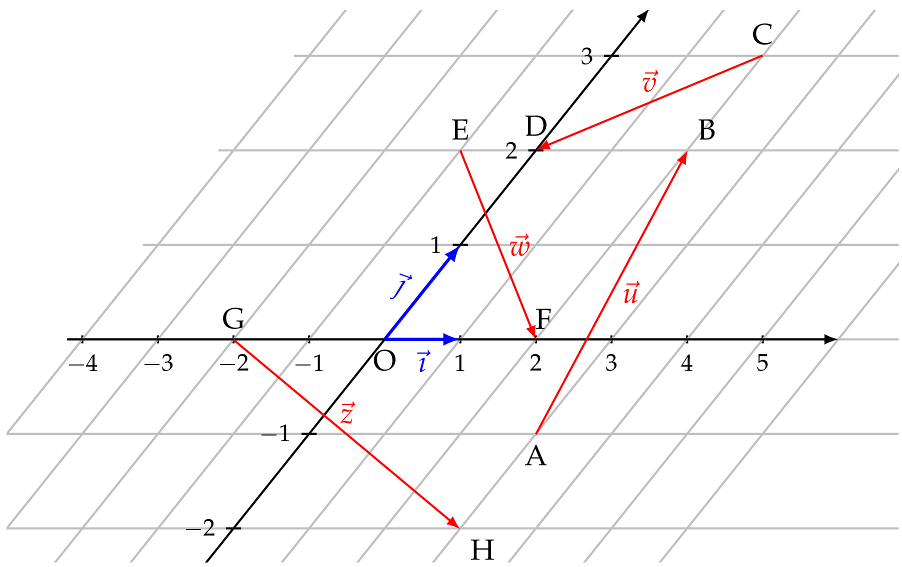
$$\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

Le couple (x, y) s'appelle les **coordonnées** du point M ou des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ ou $\overrightarrow{OM}$.



4.2 Application

Lire les coordonnées des points de A à H et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

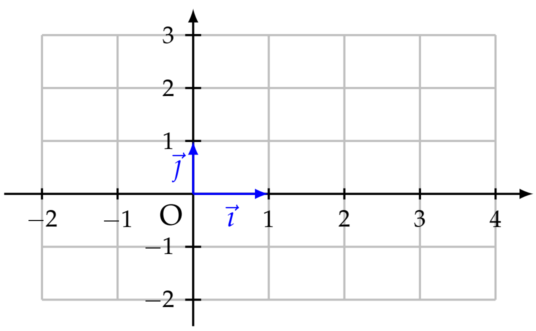


A(3; −1), B(2; 2), C(2; 3), D(0; 2), E(−1; 2), F(2; 0), G(−2; 0), H(3; −2)

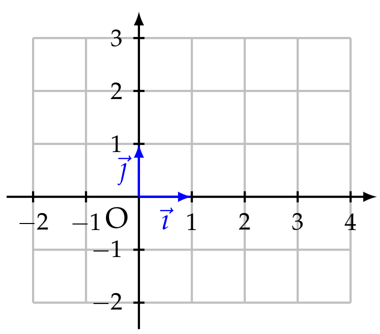
$\vec{u}(-1;3)$, $\vec{v}(-2;-1)$, $\vec{w}(3;-2)$, $\vec{z}(5;-2)$

4.3 Repères orthogonaux et orthonormée

$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère **orthogonal** si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$



$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère **orthonormé** si $\vec{\imath} \perp \vec{\jmath}$ et si l'unité est la même sur les deux axes.



5 Géométrie analytique

Le but le la géométrie analytique est de résoudre numériquement un problème de géométrie. Cela suppose la notion de coordonnées et de repère. Le progrès qu'a apporté la géométrie analytique est énorme car il a permit de faire un « pont » entre l'algèbre et la géométrie qui jusque là était deux disciplines bien séparées.

Depuis l'apparition de l'ordinateur, la géométrie analytique devient indispensable pour visualiser des figures géométriques.

5.1 Coordonnées d'un vecteur

Soit deux points $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}\,,\,y_\mathrm{A})$ et $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}\,,\,y_\mathrm{B})$ dans un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
On a alors les relations suivantes :

- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$: $(x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}\,,\,y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A})$
- Les coordonnées du milieu I du segment [AB] sont : $\left(\dfrac{x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}}{2}\,;\,\dfrac{y_\mathrm{A}+y_\mathrm{B}}{2}\right)$

Soit les points $\mathrm{A}(1\,,-5)$ et $\mathrm{B}(3\,,-9)$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et du milieu I de [AB].

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ -9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{I} = \left(\frac{1+3}{2}\,,\,\frac{-5-9}{2}\right) = (2\,,-7)$$

5.2 Opérations sur les coordonnées

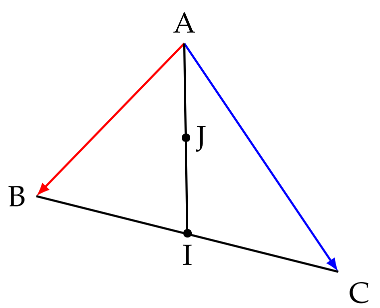
Soit deux vecteurs $\vec{u}(x\,,\,y)$ et $\vec{v}(x'\,,\,y')$

- $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si $x = x'$ et $y = y'$
- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont : $(x + x'\,,\,y + y')$
- Les coordonnées de $k\,\vec{u}$, avec $k \in \mathbb{R}$ sont : $(k\,x\,,\,k\,y)$

Soient ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [BC] et[AI]. Dans le repère $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$.
Calculer les coordonnées de I et J puis du vecteur $\vec{u}$ tel que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{JA}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{JC}}$.

Dans $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$: $\mathrm{A}(0,0)$, $\mathrm{B}(1,0)$ et $\mathrm{C}(0,1)$.
On obtient alors :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+0}{2} \\ \dfrac{0+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$$



$$\vec{u} = 2\overrightarrow{\mathrm{JA}} + \overrightarrow{\mathrm{JB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{JC}} = 2\begin{pmatrix} 0-\dfrac{1}{4} \\ 0-\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-\dfrac{1}{4} \\ 0-\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0-\dfrac{1}{4} \\ 1-\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}$$

5.3 Colinéarité de deux vecteurs

Le **déterminant** de 2 vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ est le nombre noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ tel que :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y \qquad (1^{\text{re}} \text{ diagonale} - 2^{\text{nde}} \text{ diagonale})$$

On donne $\vec{u}(3,5)$ et $\vec{v}(-2,1)$: $\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-2) \times 5 = 3 + 10 = 13.$

Deux vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ sont colinéaires si, et seulement si :

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xy' - x'y = 0$$

On donne les vecteurs $\vec{u}(10\,,-5)$ et $\vec{v}(-4\,,\,2)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-il colinéaires ?

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 10 \times 2 - (-4) \times (-5) = 20 - 20 = 0$$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Remarque : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles. Parfois le calcul du déterminant ne s'impose pas car le rapport est immédiat. C'est le cas par exemple de : $\vec{u}(2,4)$ et $\vec{v}(4,8)$ où l'on observe que $\vec{v} = 2\vec{u}$

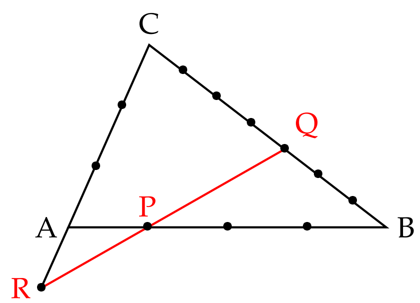
5.4 Applications

- On donne les points M$(4\,,-1)$, N$(7\,,-3)$, P$(-5\,,\,5)$.
Les points M, N et P sont-ils alignés ?

$$\det(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}) = \begin{vmatrix} 7-4 & -5-4 \\ -3-(-1) & 5-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -9 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$$

Le déterminant de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires et donc les points M, N et P sont alignés.

- ABC est un triangle, P est un point de (AB), Q un point de (BC) et R un point de (CA) disposés comme sur le dessin. Les graduations sur les droites sont régulières.
Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.



En l'absence de repère, on peut prendre $(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})$.

D'après les graduations : R$\left(0\,,-\dfrac{1}{3}\right)$ et P$\left(\dfrac{1}{4}\,,\,0\right)$

$$\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow \quad Q\left(\frac{4}{7}\,,\,\frac{3}{7}\right).$$

$$\det(\overrightarrow{RP},\overrightarrow{RQ}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}-0 & \frac{4}{7}-0 \\ 0+\frac{1}{3} & \frac{3}{7}+\frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{16}{21} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \times \frac{16}{21} - \frac{4}{7} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{21} - \frac{4}{21} = 0$$

Les vecteurs $\overrightarrow{RP}$ et $\overrightarrow{RQ}$ sont donc colinéaires et donc les points P, Q et R sont alignés.

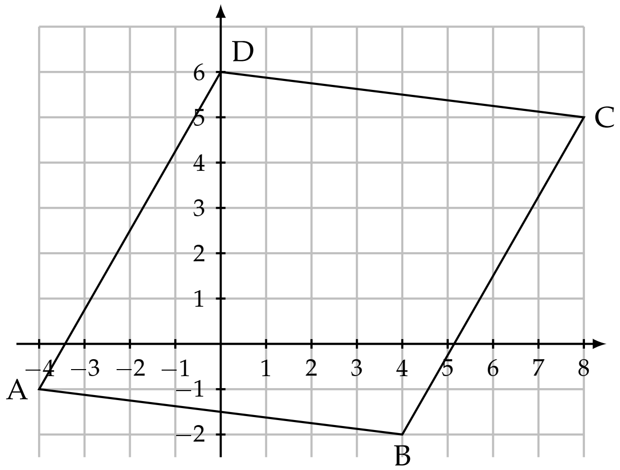
5.5 Distance

Dans un repère **orthonormé**, la distance entre deux points $A(x_A\,,\,y_A)$ et $B(x_B\,,\,y_B)$ est donnée par la relation :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ce théorème découle du théorème de Pythagore d'où la nécessité d'avoir un repère orthonormé.

On donne les points suivants : $A(-4\,,-1)$, $B(4\,,-2)$, $C(8\,,\,5)$, $D(0\,,\,6)$.
Faire une figure dans un repère orthonormé puis montrer que ABCD est un losange.



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-(-4) \\ -2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 8-0 \\ 5-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

ABCD est un parallélogramme. De plus

$$AB = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65} \quad \text{et} \quad BC = \sqrt{(8-4)^2 + (5+2)^2} = \sqrt{65} \quad \text{donc } AB = BC$$

Le parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur donc ABCD est un losange.

6 Thalès et centre de gravité

6.1 Théorème de Thalès

L'efficacité et l'élégance de la traduction vectorielle du théorème de Thalès permet de confirmer la puissance du calcul vectoriel.
Le théorème devient alors une équivalence pour le théorème et sa réciproque.

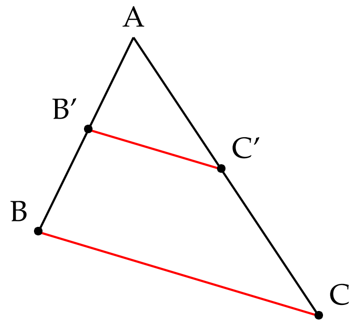
Soient ABC un triangle et deux points B′ et C′ respectivement sur (AB) et (AC).

$$\overrightarrow{B'C'} = k\,\overrightarrow{BC} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \overrightarrow{AB'} = k\,\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC'} = k\,\overrightarrow{AC} \end{cases} , \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Démonstration : Par double implication.

- De la gauche vers la droite :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B'C'} &= k\,\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} &= k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} &= k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{B'A} - k\,\overrightarrow{BA} &= k\,\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} \quad (1) \end{aligned}$$



B′ et C′ sur (AB) et (AC) donc les vecteurs $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AB}$ ainsi que les vecteurs $\overrightarrow{AC'}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{AB'} = k_1\overrightarrow{AB} \ \text{ et } \ \overrightarrow{AC'} = k_2\overrightarrow{AC}$$

Remplaçons dans (1) : $k_1\overrightarrow{BA} - k\,\overrightarrow{BA} = k\,\overrightarrow{AC} - k_2\overrightarrow{AC} \quad \Leftrightarrow \quad (k_1 - k)\overrightarrow{BA} = (k - k_2)\overrightarrow{AC}$

Or les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires car ABC est un triangle donc

$$k_1 - k = k - k_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = k_1 = k_2$$

On a alors : $\overrightarrow{AB'} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\,\overrightarrow{AC}$

- De la droite vers la gauche : On a : $\overrightarrow{AB'} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC'} = k\,\overrightarrow{AC} \quad (2)$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AC'} \overset{(2)}{=} k\,\overrightarrow{BA} + k\,\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \overset{\text{Chasles}}{=} k\,\overrightarrow{BC}$$

6.2 Centre de gravité

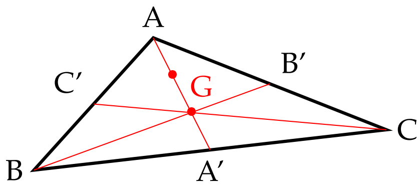
La formule vectorielle définissant le centre de gravité d'un triangle permet de définir de façon plus générale le barycentre de trois points associés à des coefficients.

Le centre de gravité G d'un triangle ABC est défini par la relation :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

On a alors si A′ est le milieu du segment [BC] : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Démonstration : Montrons d'abord que la définition euclidienne, intersection des médianes, est équivalente à la définition vectorielle, $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.



Soit A′ l'intersection des droites (GA) et (BC).

Les vecteurs $\overrightarrow{GA'}$ et $\overrightarrow{GA}$ et les vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

$$\exists k, k' \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{GA'} = k\,\overrightarrow{GA} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BA'} = k'\,\overrightarrow{BC}$$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \\
&\overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BC}) = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \\
&\overrightarrow{GA} + k\,\overrightarrow{GA} - k'\,\overrightarrow{BC} + k\,\overrightarrow{GA} - k'\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \\
&(1+2k)\overrightarrow{GA} + (-2k'+1)\overrightarrow{BC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad (1+2k)\overrightarrow{GA} = (2k'-1)\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Or les vecteur $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc :

$$1 + 2k = 0 \quad \text{et} \quad 2k' - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad k' = \frac{1}{2}$$

Donc $\overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ donc A′ est le milieu de [BC]. Par permutation circulaire : on montre également que B′ et C′ sont les milieux respectifs de [AC] et [AB].

Conclusion : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$ G intersection des médianes

De plus, on sait que $k = -\frac{1}{2}$ donc :

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AA'} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$