Équation du second degré

Table des matières

1 Révisions

1.1 Équations du second degré se factorisant

Exemples :

1) Résoudre : $7x^2 + 3x = 0$

   On factorise par x : $x(7x+3) = 0$ on obtient alors $S = \left\{-\dfrac{3}{7}; 0\right\}$

2) Résoudre : $x^2 - 14x + 49 = 0$

   On factorise par une identité remarquable : $(x-7)^2 = 0$ on obtient alors $S = \{7\}$

3) Résoudre : $(3x-1)(4x-1) = 3(3x-1)(2x+5)$

   On factorise par un facteur commun $(3x-1)$:

   $(3x-1)(4x-1) - 3(3x-1)(2x+5) = 0$ $(3x-1)[4x-1-3(2x+5)] = 0 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \quad -2(3x-1)(x+8) = 0$

   On obtient alors $S = \left\{-8; \dfrac{1}{3}\right\}$

4) Résoudre $4x^2 + 9 = 0$

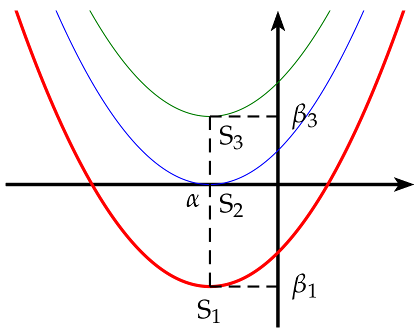
   Cette équation ne peut se factoriser car somme de deux carrés. Cette équation est impossible $S = \varnothing$

1.2 fonction du second degré

Toute fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut se mettre sous la forme canonique suivante : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

- Si le coefficient a est positif, on obtient les variations suivantes :

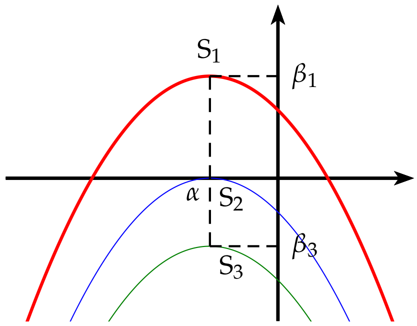
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$



Remarque : Le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ est conditionné par la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses soit le signe de β. Si $\beta < 0$ il y a deux solutions, si $\beta = 0$ il y a une solution et si $\beta > 0$ il n'y a pas de solution.

- Si le coefficient a est négatif, on obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	β	$-\infty$



Remarque : Le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ est conditionné par la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses soit le signe de β. Si $\beta < 0$ il n'y a pas de solution, si $\beta = 0$ il y a une solution et si $\beta > 0$ il y a deux de solution.

Exemples :

1) Déterminer la forme canonique de la fonction $f(x) = x^2 - 7x + 5$ puis déterminer les variation de la fonction f et en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$$

On obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution car son minium 1 est positif

2)

3) Déterminer la forme canonique de la fonction $g(x) = -2x^2 - 4x + 3$ puis déterminer les variation de la fonction g et en déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$

$$g(x) = -2(x^2 + 2x) + 3 = -2\left[(x+1)^2 - 1\right] + 3 = -2(x+1)^2 + 5$$

On obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	5	$+\infty$

L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions car son maximum 5 est positif

2 Résolution générale de l'équation du second degré

2.1 Forme canonique

Le procédé : On factorise par le coefficient $a \neq 0$, puis on forme un carré avec les deux premiers termes en ayant soin de retrancher le terme rajouté. On réduit ensuite la forme obtenue.

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ on obtient alors :

$$P(x) == a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

2.2 Solutions de l'équation du second degré

On doit résoudre l'équation $P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c = 0$

Trois cas peuvent se présenter :

- $\Delta > 0$ l'équation peut se factoriser par une différence de deux carrés.

$$P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

  On obtient alors deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Exemple : Résoudre l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$

  On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 16 - 4 = 12$

  $\Delta > 0$ l'équation admet alors deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{4 - \sqrt{12}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

- $\Delta = 0$ l'équation est factorisée $P(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

  L'équation admet alors une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

  Exemple : Résoudre l'équation $3x^2 + 12x + 12 = 0$

On calcule : $\Delta = 12^2 - 4 \times 3 \times 12 = 144 - 144 = 0$

$\Delta = 0$ l'équation admet donc une solution double : $x_0 = -\dfrac{12}{6} = -2$

- $\Delta < 0$ l'équation ne peut pas se factoriser car somme de deux carrés. Il n'y a donc pas de solution

  Exemple : Résoudre l'équation $x^2 + 6x + 12 = 0$

  On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 12 = 36 - 48 = -12$

  $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solution.

2.3 Ce qu'il faut retenir

Théorème 1 : L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe d'un paramètre $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant**

- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solution

2.4 Algorithme

On peut proposer l'algorithme ci-contre pour résoudre avec des valeurs approchées une équation du second degré : $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Comme il y a trois éventualités, on doit faire deux tests.

On peut tester cet algorithme avec l'équation :

$$2x - 3x + 1 = 0$$

On rentre $A = 2$, $B = -3$ et $C = 1$

on obtient alors :

$$X = 1 \quad \text{et} \quad Y = 0,5$$

Nom : **SDEGRE**

Variables : $A \neq 0, B, C, D, X, Y$ réels
Entrées et initialisation
  Lire A, B, C
  $B^2 - 4AC \to D$
Traitement
  si $D > 0$ **alors**
    $\dfrac{-B + \sqrt{D}}{2A} \to X$
    $\dfrac{-B - \sqrt{D}}{2A} \to Y$
    Afficher X, Y
  sinon
    si $D = 0$ **alors**
      $\dfrac{-B}{2A} \to X$
      Afficher X
    sinon
      Afficher "PAS DE SOL"
    fin
  fin