Équation du second degré

Table des matières

1 Révisions

1.1 Équations du second degré se factorisant

Exemples :

1) Résoudre : $7x^2 + 3x = 0$

   On factorise par x : $x(7x+3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{-\frac{3}{7}\,;0\right\}$

2) Résoudre : $x^2 - 14x + 49 = 0$

   On factorise par une identité remarquable : $(x-7)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \{7\}$

3) Résoudre : $(3x-1)(4x-1) = 3(3x-1)(2x+5)$

   On factorise par un facteur commun $(3x-1)$:

   $(3x-1)(4x-1) - 3(3x-1)(2x+5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3x-1)[4x-1-3(2x+5)] = 0$

   $\Leftrightarrow \quad -2(3x-1)(x+8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S = \left\{-8\,;\frac{1}{3}\right\}$

4) Résoudre $4x^2 + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = -9$

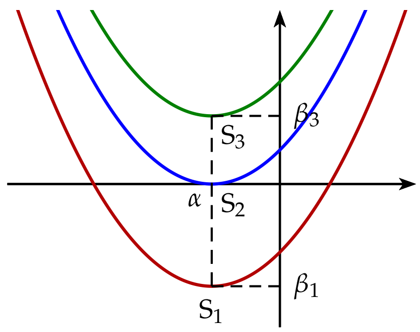
   Cette équation est impossible $S = \varnothing$

1.2 Fonction du second degré

Toute fonction du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut se mettre sous la forme canonique suivante : $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

- Si le coefficient a est positif, on obtient les variations suivantes :

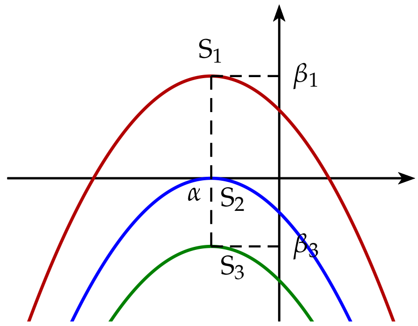
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque : Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ est conditionné par la position de la parabole à l'axe des abscisses soit le signe de β.
Si $\beta < 0$ deux solutions, si $\beta = 0$ une solution et si $\beta > 0$ pas de solution.

- Si le coefficient a est négatif, on obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$



Remarque : Le nombre de solution de l'équation $f(x) = 0$ est conditionné par la position de la parabole à l'axe des abscisses soit le signe de β.
Si $\beta < 0$ pas de solution, si $\beta = 0$ une solution et si $\beta > 0$ deux solutions.

Exemples :

1) Déterminer la forme canonique de la fonction $f(x) = x^2 - 4x + 5$ puis déterminer les variations de la fonction f et en déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = (x-2)^2 - 4 + 5 = (x-2)^2 + 1$$

On obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution car son minium 1 est positif

2) Déterminer la forme canonique de la fonction $g(x) = -2x^2 - 4x + 3$ puis déterminer les variations de la fonction g et en déduire le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$

$$g(x) = -2(x^2 + 2x) + 3 = -2\left[(x+1)^2 - 1\right] + 3 = -2(x+1)^2 + 5$$

On obtient les variations suivantes :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	5	↘ $+\infty$

L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions car son maximum 5 est positif

2 Résolution générale de l'équation du second degré

2.1 Forme canonique

On factorise par le coefficient $a \neq 0$, puis on forme un carré avec les deux premiers termes en ayant soin de retrancher le terme rajouté. On réduit ensuite la forme obtenue.

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

On pose $\Delta = b^2-4ac$ on obtient : $P(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

2.2 Solutions de l'équation du second degré

On doit résoudre l'équation $P(x)=0 \;\Leftrightarrow\; ax^2+bx+c=0$

Trois cas peuvent se présenter :

- $\Delta > 0$ l'équation peut se factoriser par une différence de deux carrés.

  $$P(x)=0 \;\Leftrightarrow\; a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

  On obtient alors deux solutions :

  $$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

  Exemple : Résoudre l'équation $x^2-4x+1=0$

  On calcule : $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times1\times1 = 16-4=12$

  $\Delta > 0$ l'équation admet alors deux solutions distinctes :

  $$x_1=\frac{4-\sqrt{12}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{2}=2+\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{4-\sqrt{12}}{2}=2-\sqrt{3}$$

- $\Delta = 0$ l'équation est factorisée $P(x)=0 \;\Leftrightarrow\; a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$

  L'équation admet alors une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

  Exemple : Résoudre l'équation $3x^2+12x+12=0$

  On calcule : $\Delta = 12^2-4\times3\times12 = 144-144=0$

  $\Delta = 0$ l'équation admet donc une solution double : $x_0 = -\dfrac{12}{6} = -2$

- $\Delta < 0$ équation non factorisable car somme de deux carrés : pas de solution

  Exemple : Résoudre l'équation $x^2 + 6x + 12 = 0$

  On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 12 = 36 - 48 = -12$

  $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solution.

2.3 Ce qu'il faut retenir

Théorème 1 : L'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe d'un paramètre $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé **discriminant**

- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'admet pas de solution

2.4 Algorithme

On peut proposer l'algorithme ci-contre pour résoudre avec des valeurs approchées une équation du second degré :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Comme il y a trois éventualités, on doit faire deux tests.

On teste l'algorithme avec l'équation :

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

eq2d(2,−3,1) retourne : 1.0 , 0.5

```python
from math import*
def eq2d(a,b,c):
    delta=b**2-4*a*c
    if delta>0:
        x=(-b+sqrt(delta))/(2*a)
        y=(-b-sqrt(delta))/(2*a)
        return x,y
    elif delta==0:
        x=-b/(2*a)
        return x
    else:
        return "pas de solution"
```