Correction contrôle de mathématiques
Du lundi 22 avril 2013

EXERCICE 1

Relation de Chasles **(2 points)**

1) Avec la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD}\\ &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB}\\ &= \overrightarrow{BD}\end{aligned}$$

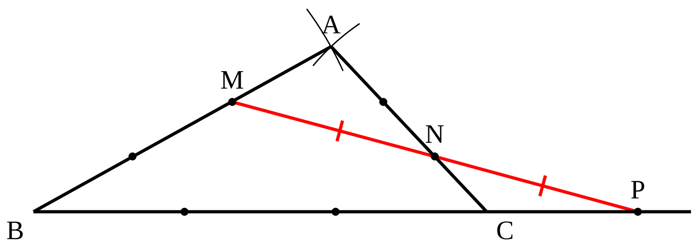
2) De même on a :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}\\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

EXERCICE 2

Colinéarité **(3 points)**

1) On a la figure suivante :



2) On a à l'aide de la relation de Chasles et des définitions des points :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}\\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NC} &= \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CP}\\ &= -\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CP}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

On a donc : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$

3) Le point N est donc le milieu de [MP]

EXERCICE 3

Orthogonalité **(4 points)**

1) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CI}$

$$\overrightarrow{AB} = (-6; -6) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CI} = (4; -4)$$

On calcule : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}) = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ -6 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 24 = 48$

Comme le déterminant est non nul, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CI}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (AB) et (CI) ne sont pas parallèles. Elles sont donc concourantes.

2) On calcule les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IB}$:

$$\overrightarrow{AI} = (-3; -3) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IB} = (-3; -3)$$

On a donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc I est le milieu de [AB].

3) On calcule les longueurs de AC et BC :

$$AC = \sqrt{(-5-2)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$
$$BC = \sqrt{(-5+4)^2 + (6+1)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Le triangle ABC est alors isocèle en C. Comme I est le milieu de [AB], la droite (CI) est la médiane mais aussi la hauteur issue de C du triangle ABC. Les droites (CI) et (AB) sont donc orthogonales.

Exercice 4

Alignement et parallélisme **(3 points)**

1) On calcule les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = (8; 5) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC} = (16; 10)$$

On observe que : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$. Les vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires et donc les points A, B et C sont alignès.

2) On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$$\overrightarrow{AB} = (-6; 15) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD} = (4; -10)$$

On calcule : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 15 & -10 \end{vmatrix} = 60 - 60 = 0$

Le déterminant est nul, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Exercice 5

Résolution analytique **(8 points)**

1) Cf figure

2) a) On pose D$(x;y)$. Pour que ABDC soit un parallélogramme, on doit avoir :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2\\y-2\end{pmatrix}$$

En identifiant chaque coordonnée, on obtient :

$$\begin{cases} x+2=3 \\ y-2=6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1 \\ y=8 \end{cases} \qquad \text{on a donc D(1 ;8).}$$

b) On a :

$$\text{AB} = \sqrt{(6-3)^2+(3+3)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$\text{AC} = \sqrt{(-1-3)^2+(2+3)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Comme AB$\neq$AC, deux côtés consécutifs de ABDC ne sont pas de même longueur. ABDC n'est pas un losange.

3) a) On pose G$(x;y)$. D'après la relation vectorielle on a :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$
$$\begin{pmatrix}3-x\\-3-y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6-x\\3-y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2-x\\2-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}7-3x\\2-3y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

En identifiant chaque coordonnée, on a :

$$\begin{cases} 7-3x=0 \\ 2-3y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{7}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

On a $\text{G}\left(\dfrac{7}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

b) On a : $\text{I} = \begin{pmatrix}\dfrac{6-2}{2}\\ \dfrac{3+2}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\ \dfrac{5}{2}\end{pmatrix}$ et $\text{J} = \begin{pmatrix}\dfrac{3-2}{2}\\ \dfrac{-3+2}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

c) On a : $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix}\dfrac{7}{3}-3\\ \dfrac{2}{3}+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{2}{3}\\ \dfrac{11}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix}2-3\\ \dfrac{5}{2}+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\ \dfrac{11}{2}\end{pmatrix}$

$$\det(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AI}) = \begin{vmatrix}-\dfrac{2}{3} & -1\\ \dfrac{11}{3} & \dfrac{11}{2}\end{vmatrix} = -\frac{2}{3}\times\frac{11}{2}+\frac{11}{3} = -\frac{11}{3}+\frac{11}{3} = 0$$

Le détermiant est nul donc les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et donc les points A, G et I sont alignés.

d) On a : $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix}\dfrac{7}{3}-6\\ \dfrac{2}{3}-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{11}{3}\\ -\dfrac{7}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BJ} = \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2}-6\\ -\dfrac{1}{2}-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\dfrac{11}{2}\\ -\dfrac{7}{2}\end{pmatrix}$

On observe que : $3\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BJ}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires et donc les points B, G et J sont alignés.

e) G est alors l'intersection des droites (AI) et (AJ) médianes issues respectivement de A et B du triangle ABC. Le points G est donc le centre de gravité du triangle ABC.