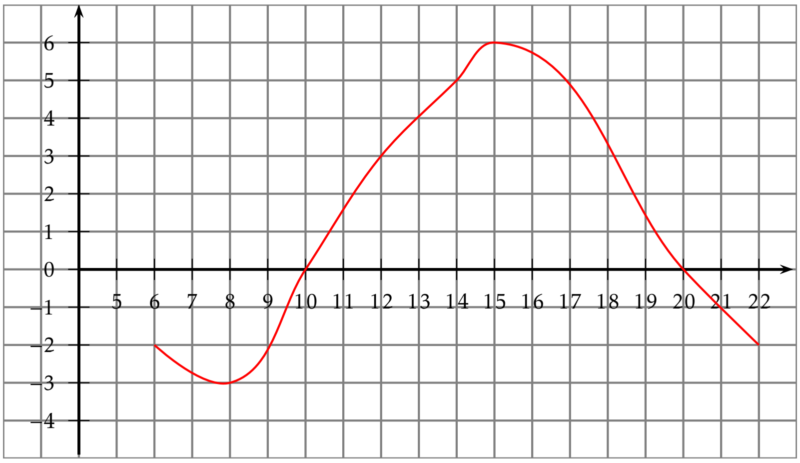
Etude qualitative de fonctions

I- Activité d'introduction

1) Exemple

Un capteur a relevé la température sous un abri, de façon continue entre 6h et 22h.
Le relevé est donné sous forme d'un graphique :



On considère la fonction f, qui à chaque instant x associe la température en degrés.

1) Indiquer la légende sur les axes.
Quelle est la variable ? L'ensemble de définition de f ?

2) Décrire l'évolution de la température au cours de la journée.

3) **a.** Au cours de cette journée, quelle a été la température maximale ?
A quelle heure ?

b. Au cours de cette journée, quelle a été la température minimale ?
A quelle heure ?

1) La variable est le temps. L'ensemble de définition de f est $[6;22]$.

2) La température décroit de 6h à 8h, puis elle croit de 8h à 15h, puis elle décroit de jusqu'à 22h.
On dit que la fonction f est croissante sur $[6;8]$ et décroisssante sur $[8;15] \cup [15;22]$.
On peut résumer ses variations dans le tableau suivant appelé **tableau de variations de f**

x	6		8		15		22
Variations de g	-2	↘	-3	↗	6	↘	-2

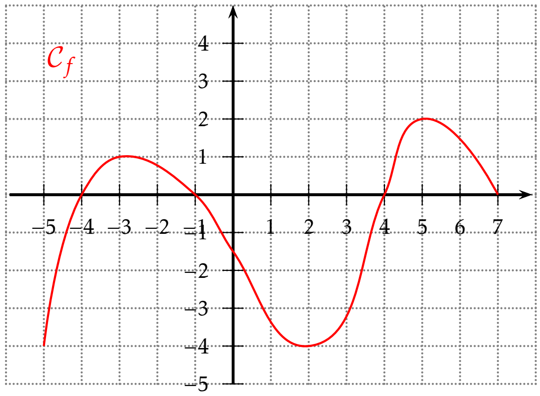
4) **a.** La température maximale était 6°à 15h, On dit que le maximum de f est 6 atteint en 15.

b. La température minimale était -3°à 8h, On dit que le minimum de f est -3 atteint en 8.

2) Synthèse du vocabulaire utilisé

Voici la courbe d'une fonction f.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Enoncer les variations de f.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) Déterminer le minimum et le maximum de f et préciser en quelles valeurs ils sont atteints.



1) L'ensemble de définition de f est $[-5;7]$.
2) f est croissante sur $[-5;-3] \cup [2;5]$ et décroissante sur $[-3;2] \cup [5;7]$ son tableau de variation est :

x	-5	-3	2	5	7
Variations de f	-4 ↗	-1 ↘	-4 ↗	2 ↘	0

3) Le maximum de f sur $[-5;7]$ est 2 atteint en 5
Le minimum de f sur $[-5;7]$ est -4 atteint en -5 et 2.

II- Sens de variation d'une fonction

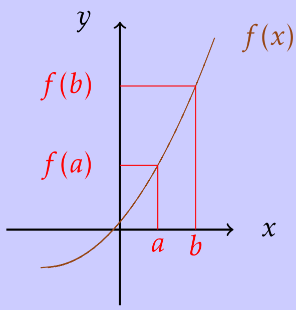
1) Définition

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que

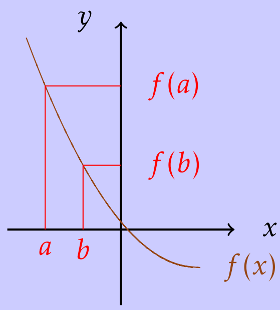
- cette fonction est *strictement croissante* sur I si « f conserve l'ordre » sur cet intervalle.

  Pour tout a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.



- cette fonction est *strictement décroissante* sur I si « f inverse l'ordre » sur cet intervalle.

  Pour tout a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.



Définition

On dit qu'une fonction est strictement monotone sur I si elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur I.

2) Exemples

Exemple 1:
Une fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;4]$ et strictement décroissante sur $]4;+\infty[$.
Comparer :

1) $f(-2)$ et $f(3)$.
2) $f(2{,}7)$ et $f(-1{,}52)$.
3) $f(6{,}7)$ et $f(8{,}2)$.

Exemple 2:
Le tableau de variation d'une fonction g est donné ci-dessous.

x	-4		-1		2		3
Variations de g	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6

1) Comparer si possible :
   a. $g(-2{,}1)$ et $g(-3{,}4)$.
   b. $g(1{,}5)$ et $g(-0{,}5)$.
   c. $g(-0{,}5)$ et $g(2{,}4)$.
2) Encadrer $g(x)$ sur chacun des intervalles $[-4;-1]$, $[-1;2]$ et $[2;3]$.

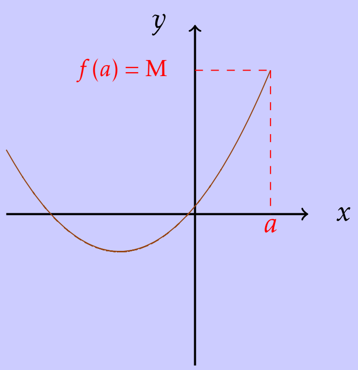
III- Extremum d'une fonction

1) Définition

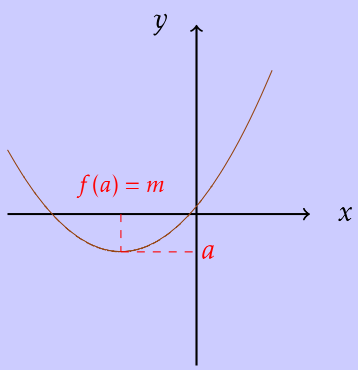
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

- le maximum de f sur I est M atteint en a si pour tout x de I on a $f(x) \leqslant \mathrm{M}$ et $\mathrm{M} = f(a)$.



- le minimum de f sur I est m atteint en a si pour tout x de I on a $f(x) \geqslant m$ et $m = f(a)$



2) Exemple

Exemple 3:
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)^2 - 3$.

1) Tracer la courbe de f sur la calculatrice.
2) f admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?
3) Démontrer le résultat précédent.