Les vecteurs

I- Translation et vecteur

1) Activités d'introduction

a) Activité 1

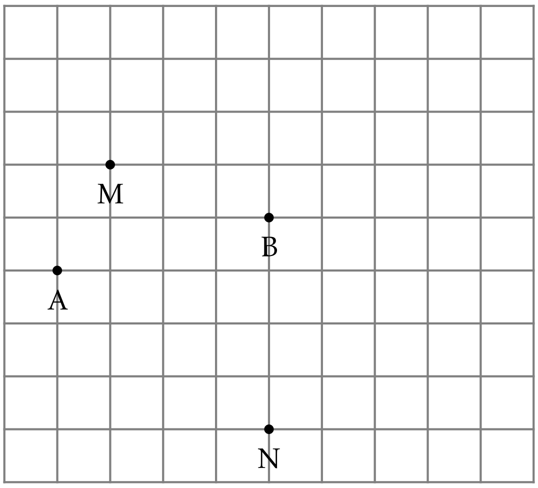
A et B deux points du plan.
Nous allons découvrir une nouvelle transformation du plan transformant A en B, appelée **translation**.
Pour transformer un point M en son image M′, on applique l'algorithme suivant :

- Construire le milieu I de [BM]
- Construire le point M′ tel que I soit aussi le milieu de [AM′].

1) Construire ci-contre le point M′, image de M par la translation.
Que peut-on dire du quadrilatère AMBM′ ?

2) Construire de même le point N′, image de N par la translation.

3) Tracer en rouge les flèches allant de A vers B, de M vers M′ et de N vers N′.
Que remarque-t-on ?



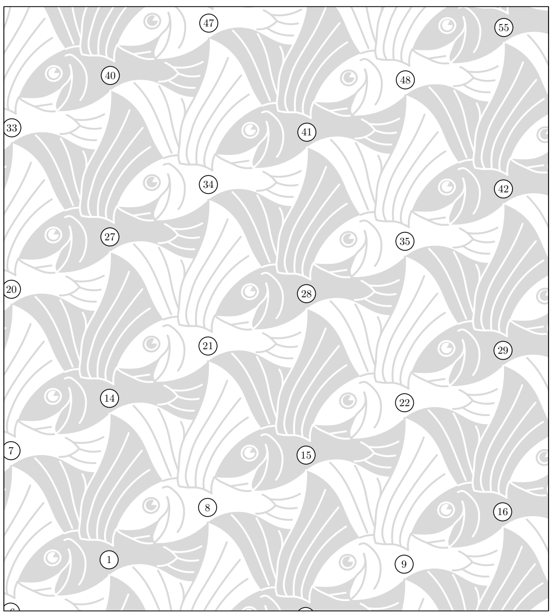
b) Activité 2

La figure ci-dessous représente *un pavage* : c'est un motif qui recouvre entièrement une surface.
Ici, le pavage est constitué d'un unique motif : un poisson.

1) Représenter sur la figure le vecteur $\vec{u}$ de la translation qui transforme le poisson 21 en 22.

2) De même pour celle de vecteur $\vec{v}$ transformant le poisson 22 en 42.

3) On enchaîne maitenant les deux translations et on note $\vec{u}+\vec{v}$ le vecteur de la translation transformant le poisson 21 en 42.
Représenter $\vec{u}+\vec{v}$ et en déduire une méthode de construction de la somme de deux vecteurs.

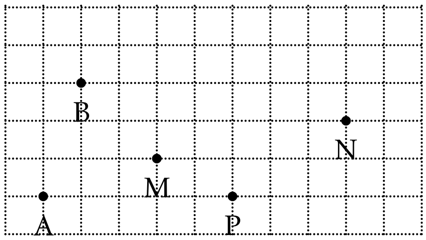


2) Définitions

Définition:

-

-



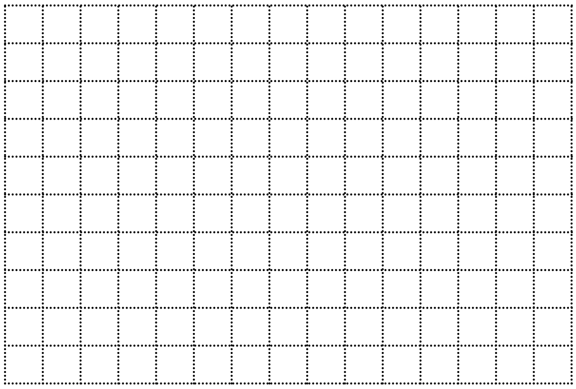
3) Caractérisation d'un vecteur

Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul du plan et $\overrightarrow{AB}$ un représentant du vecteur $\vec{u}$, alors $\vec{u}$ est caractérisé par :

-
-
-

4) Vecteurs égaux

Exemple 1:
Sur la figure ci-contre ABCD et CDEF sont deux parallélogrammes.



Propriété:

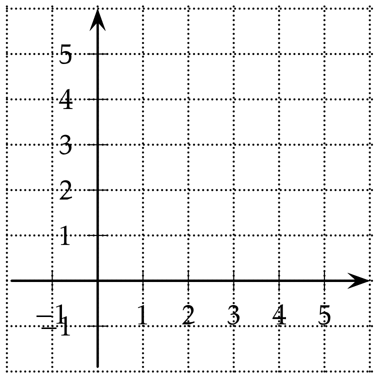
-

-

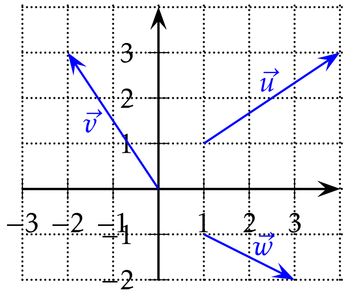
II- Vecteurs et coordonnées

1) Exemples

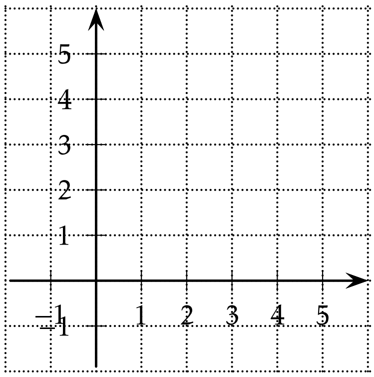
Exemple 1:
Dans un repère orthogonal on place les points $A(1;2)$ et $B(4;6)$ et on trace le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Comment peut-on lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?



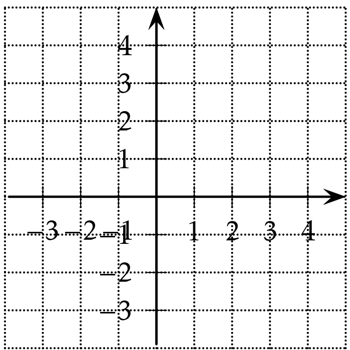
Exemple 2:
Lire les coordonnées des vecteurs représentés ci-contre.



2) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$



Propriété:
Dans un repère (O, I, J), on considère les points $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$
Alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont



Exemple 3:
Placer dans un repère les points $M(-3, -1)$, $N(2; -4)$ et $R(4; 3)$
Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$; $\overrightarrow{RN}$; $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{MM}$.

3) Vecteur nul

Définition:
On appelle vecteur nul et on note $\vec{0}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

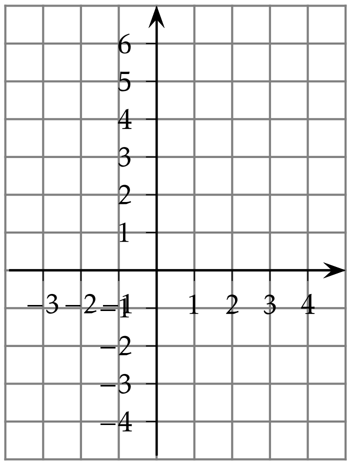
4) Vecteurs égaux

Propriété:
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs et leurs coordonnées dans un repère.

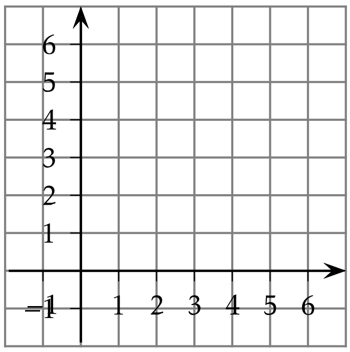
- Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont

$$\vec{u} = \vec{v} \Longleftrightarrow$$

Exemple 4:
Soient $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 5x \\ x+y \end{pmatrix}$.
Déterminer x et y pour que $\vec{v} = \vec{w}$.



Exemple 5:
Soit $\mathrm{P}(-1;6)$, démontrer que MNRP est un parallèlogramme



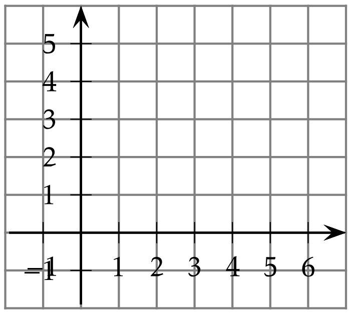
Exemple 6:
Soit $\mathrm{A}(2;2)$, $\mathrm{B}(2;-1)$ et $\mathrm{C}(6;1)$. Déterminer les coordonneés du point D tel que ABCD est un parallèlogramme.

5) Milieu d'un segment

Propriété:
Soit A, B et I trois points alors I est le milieu de [AB] si et seulement si

III- Somme de deux vecteurs

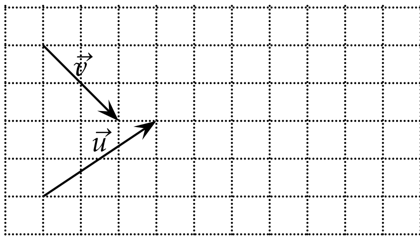
1) Exemple



Exemple 1:
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ et $A(1;4)$.
Placer A dans un repère et construire le point B image de A par $t_{\vec{u}}$.
Construire le point C image de B par $t_{\vec{v}}$.
En déduire le vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ de la translation qui transforme A en C.

2) Addition vectorielle

Définition:
En enchainant la translation de vecteur $\vec{u}$ et celle de vecteur $\vec{v}$ on obtient une nouvelle translation dont le vecteur est noté $\vec{u}+\vec{v}$.



Propriété (Relation de Chasles):
Pour tout point A, B et C du plan on a :

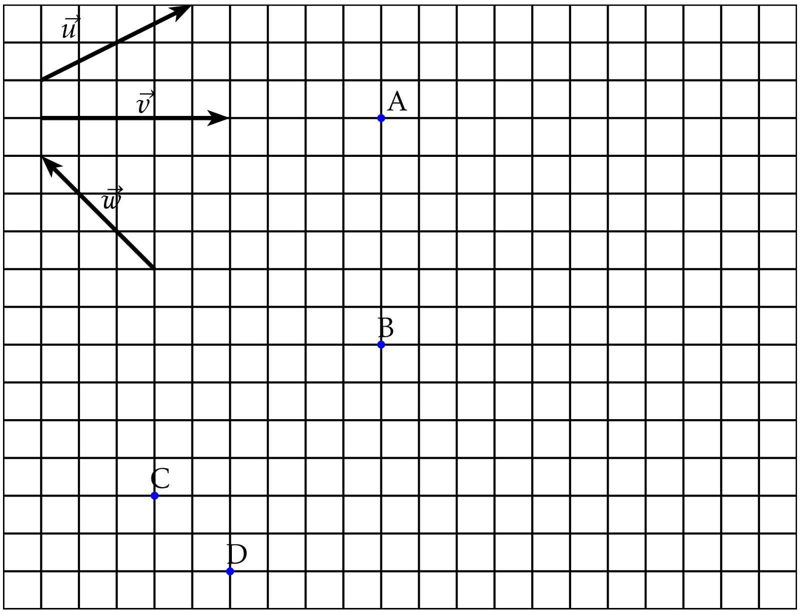
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

Propriété:
Si dans un repère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors

Propriété:
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan, on a :

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (commutativité) ;
- $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ (transitivité) ;
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$.

Exemple 2:
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$, $\vec{v}+\vec{w}$ et $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$.



Exemple 3:
Construire les points M, N, P et Q tels que :

- $\overrightarrow{AM} = \vec{u} + \vec{v}$
- $\overrightarrow{BN} = \vec{v} + \vec{w}$
- $\overrightarrow{CP} = \vec{w} + \vec{u}$
- $\overrightarrow{DQ} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

On fera apparaitre les traits de construction.

Exemple 4:
Compléter en utilisant la relation de Chasles.

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \dots$
2) $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} = \dots$
3) $\overrightarrow{EK} + \dots = \overrightarrow{EL}$
4) $\overrightarrow{\dots C} + \overrightarrow{C\dots} = \overrightarrow{OP}$
5) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{LC} = \dots$
6) $\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MK} = \dots$
7) $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{MC} = \dots$

IV- Opposé d'un vecteur, différence de 2 vecteurs

1) Opposé d'un vecteur

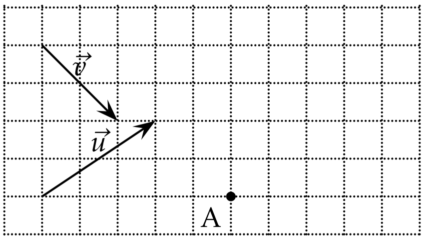
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ ont même direction, même norme mais son de sens opposé. On dit que $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
De plus $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ on note donc $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Définition:

2) Différence de deux vecteurs

Définition:

Exemple 1:
Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u} - \vec{v}$.



Exemple 2:
Simplifier en utilisant la relation de Chasles.

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \ldots$

2) $-\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PM} = \ldots$

3) $\overrightarrow{LB} - \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB} = \ldots$

3) Coordonnées de $-\vec{u}$ et de $\vec{u} - \vec{v}$

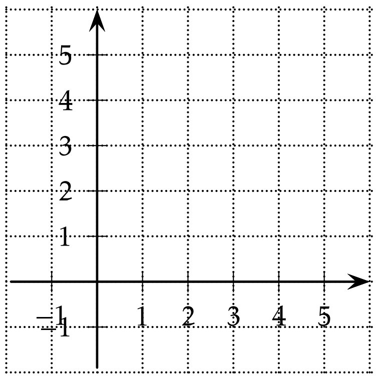
Propriété:
Si dans un repère $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors

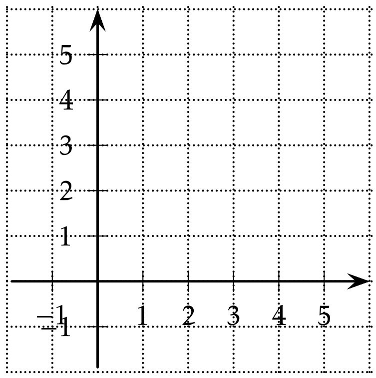
Exemple 3:
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Calculer les coordonnées des vecteurs $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{v} - \vec{w}$ et $-\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.

V- Calcul de distance, de norme

Propriété:
Dans le repère orthonormé (O, I, J), on considère les points $A(x_A ; y_A)$, et $B(x_B ; y_B)$ et le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Alors :

- La distance AB vaut AB =
- La norme de $\vec{u}$ vaut $||\vec{u}|| =$





Exemple 1:
Soient $M(2, 1)$, $N(5, 2)$ et $P(6, 5)$.
Déterminer les coordonnées de R pour que MNPR soit un parallélogramme.
Quelle est sa particularité ?