Les fonctions de références

I- Les fonctions polynômes du 2nd degré

1) La fonction carré : $x \mapsto x^2$

a) Définitions

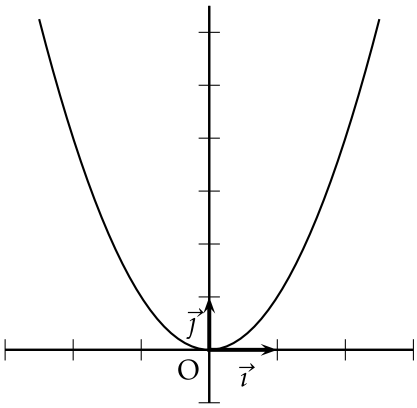
Définition

On appelle fonction carré la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

b) Représentation graphique

x	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	9.0	6.25	4.0	2.25	1.0	0.25	0.0	0.25	1.0	2.25	4.0	6.25	9.0

La courbe représentative de la fonction carré est donnée ci-dessous.
C'est une *parabole*. Elle est constituée des points $M(x, x^2)$.
On dit que l'équation de cette parabole $\mathscr{P}$ est $y = x^2$.



c) Symétrie

Propriété

Dans un repère orthogonal, la parabole d'équation $y = x^2$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Démonstration
Pour tout réel x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$. La fonction carré est donc paire.

d) Sens de variation

Propriété

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
Son minimum est 0, atteint pour $x=0$.
Le point $S(0,0)$ est appelé sommet de la parabole.
Son tableau de variations est donc le suivant :

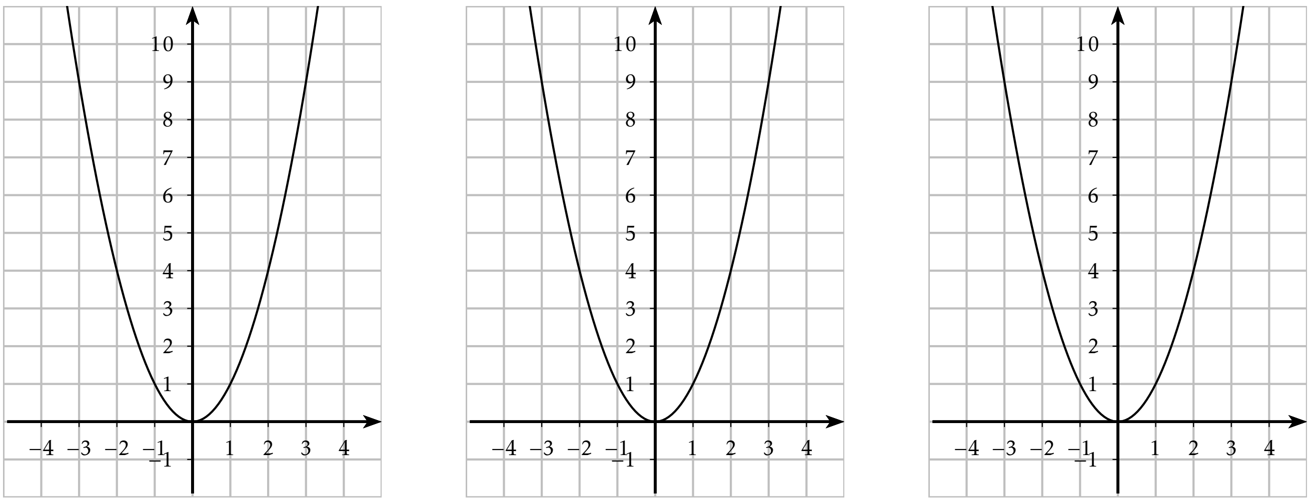
x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\nearrow$

Démonstration
Cette fonction étant paire, il suffit d'étudier son sens de variation d'un côté de 0, par exemple sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Soient x_1 et x_2 deux réels dans cet intervalle tels que $x_1 < x_2$. Alors $f(x_2)-f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2-x_1)(x_2+x_1)$. Puisque $x_1 < x_2$, $(x_2-x_1) > 0$. D'autre part, $x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0$ donc $(x_2+x_1) > 0$. Par conséquent $f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)(x_2+x_1) > 0$, c'est à dire $f(x_2) > f(x_1)$, ce qui prouve que la fonction carré est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Par symétrie, elle est donc décroissante sur $]-\infty;0]$ et atteint donc son minimum en $x=0$, minimum qui est égal à $f(0)=0$.

e) Equations $x^2 = k$ où k est un réel

Exemple 1:
En utilisant les représentations graphiques de la fonction carré ci-dessous résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 = 7$ 2. $x^2 = 0$ 3. $x^2 = -1,5$



Propriété

L'équation $x^2 = k$ admet exactement deux solutions, $x=\sqrt{k}$ et $x=-\sqrt{k}$ quand $k>0$, une solution unique, $x=0$ quand $k=0$ et aucune solution quand $k<0$.

Démonstration
On peut observer cette propriété graphiquement. Algébriquement, le résultat est clair quand $k = 0$ ou $k < 0$. Si $k > 0$, l'équation équivaut à $x^2 - k = 0$ c'est à dire, en utilisant une égalité remarquable vue au collège, $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$. On trouve alors les deux solutions annoncées.

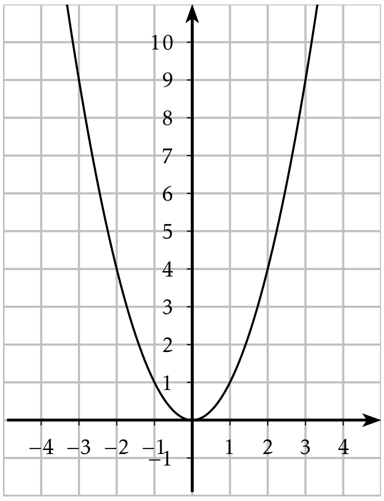
Exemple 2:
Résoudre les équations suivantes :

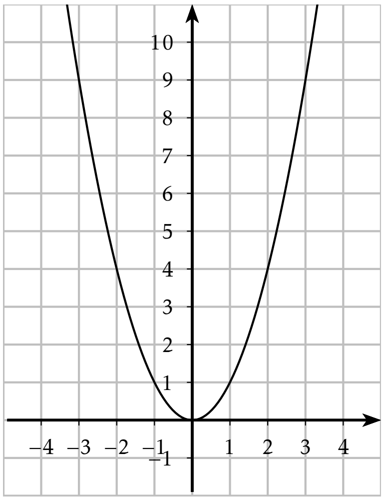
1. $5x^2 + 2 = 0$ 2. $9x^2 - 2x - 1 = -2x + 4$ 3. $6(x-3)^2 + 2 = 2$

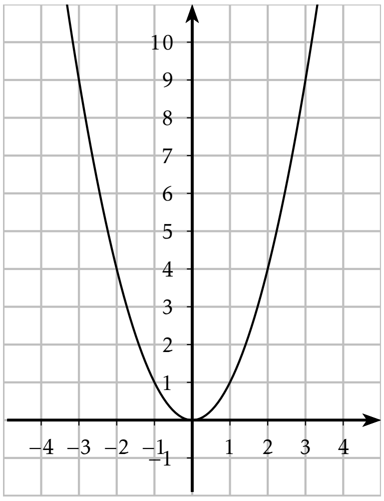
f) Inéquations $x^2 \leqslant k$, $x^2 > k$ où k est un réel

Exemple 3:
En utilisant les représentations graphiques de la fonction carré ci-dessous résoudre les équations suivantes :

1. $x^2 \leqslant 5$ 2. $x^2 \geqslant 3$ 3. $x^2 \leqslant -1$







Exemple 4:
Résoudre les inéquations :

1. $4x^2 - 1 \leqslant 0$ 2. $2x^2 - 6 > 0$

g) Comparaisons de carrés

Exemple 5:
Comparer les nombres suivants sans calculatrice :

1) $(2,73)^2$ et $(2,9)^2$.

2) $(1-\pi)^2$ et $(-2)^2$.

Exemple 6:
Encadrer $f(x)$ dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = x^2$ si $x \in]-4;-1]$.

2) $f(x) = -4x^2 + 3$ si $x \in [\frac{1}{2};2]$.

3) $f(x) = (x-2)^2 - 3$ si $x \in [0;2]$

2) Fonctions polynômes de degré 2 : $x \mapsto ax^2 + bx + c$.

a) Définition

Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont trois réels, avec $a \neq 0$.

Exemple 7:
Les fonctions suivantes sont-elles des polynômes de degré 2 ?

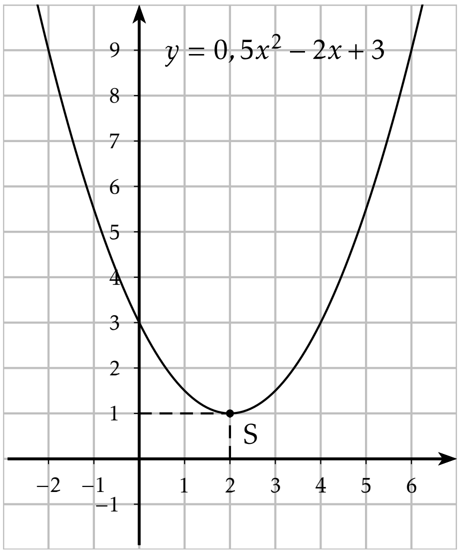
1) $f(x) = 4x - \frac{7x^2}{3}$.
2) $g(x) = \frac{2}{x^2} - 1$.
3) $h(x) = 3(x-2)^2 + 4$.

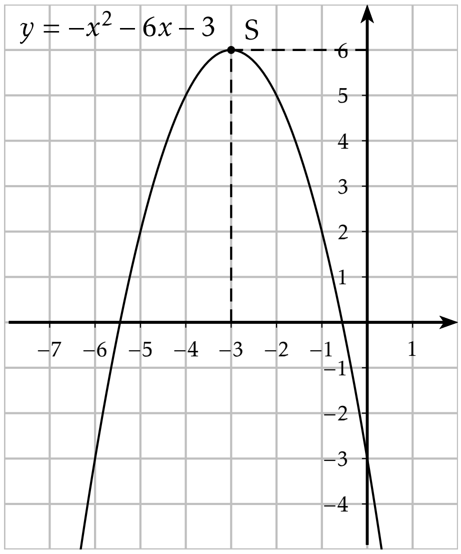
b) Représentation graphique

Propriété

La courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole, ouverte vers le haut si $a > 0$ et ouverte vers le bas si $a < 0$.

Exemple 8:





x	$-\infty$	2	$+\infty$
Variations de f	↘	1	↗

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
Variations de f	↗	6	↘

Propriété

Soit f une fonction polynôme de degré 2 et $\mathscr{P}$ la parabole qui la représente :

- La parabole admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées.
- Le point S de la parabole situé sur l'axe de symétrie est appelé sommet de la parabole, son abscisse est $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si $a > 0$ il s'agit d'un minimum et si $a < 0$ d'un maximum.

Exemple 9:
La fonction definie par $f(x) = -3x^2 + x + 6$ est une fonction polynôme de degré 2 sa parabole est ouverte vers le bas. Son sommet se trouve au point d'abscisse $x = -\frac{1}{2\times(-3)} = \frac{1}{6}$.
La fonction est donc croissante qur $]-\infty; \frac{1}{6}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{6}; +\infty[$.

c) Forme canonique

Exemple 10:
Soit f la fonction du 2nd degré définie par $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.
Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$.
$2(x-1)^2 + 3$ est appelé la forme canonique de f.

Propriété

- Toute fonction polynôme de degré 2 peut s'écrire sous la forme :

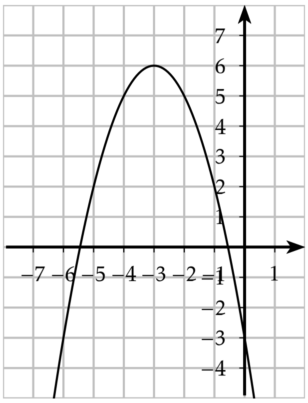
$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

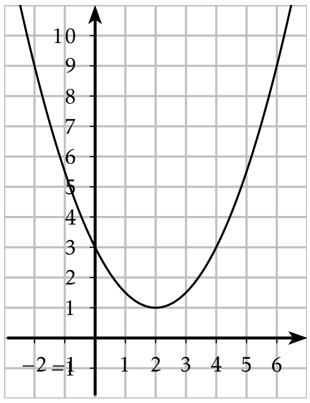
  où a, α, et β sont des réels avec $a \neq 0$.
  Cette écriture est appelée forme canonique de f.
- Le sommet de la parabole $\mathscr{P}$ représentant f a alors pour coordonnées $S(\alpha, \beta)$

Exemple 11:
Les paraboles ci-contres représentent les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = 0,5(x-u)^2 + v \text{ et } g(x) = -(x-t)^2 + w$$

1) Associer à chaque fonction sa parabole.
2) Lire graphiquement les coordonnées des sommets des paraboles.
   En déduire les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.





II- Fonction inverse et fonctions homographiques

1) La fonction inverse

a) Définition

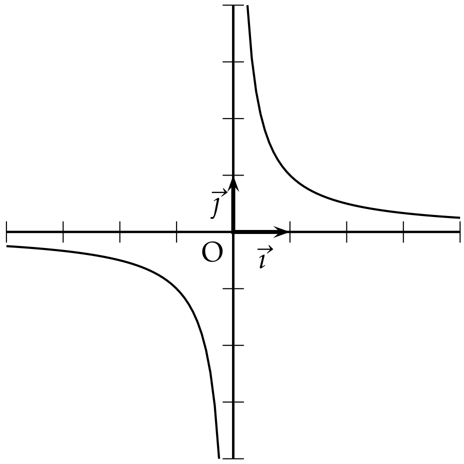
Définition

On appelle fonction inverse la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

b) Représentation graphique

x	-5	-4	-2	-1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	5
$f(x)$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

La courbe représentative de la fonction inverse est donnée ci-dessous.
C'est une *hyperbole* centrée en l'origine du repère. Elle est constituée de tous les points $\mathrm{M}(x, \frac{1}{x})$.
On dit que l'équation de cette hyperbole est $y = \frac{1}{x}$.



c) Symétrie

Propriété

Dans un repère orthogonal, l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ admet l'origine pour centre de symétrie

Démonstration
Pour tout réel x, $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x)$. La fonction carré est donc impaire.

d) Sens de variation

Propriété

La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty;0]$ et sur $]0;+\infty[$. Elle n'admet pas d'extremums sur ces deux intervalles. Son tableau de variations est donc le suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

Démonstration
Cette fonction étant impaire, il suffit d'étudier son sens de variation d'un côté de 0, par exemple sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Soient x_1 et x_2 deux réels dans cet intervalle tels que $x_1 < x_2$. Alors $g(x_2)-g(x_1) = \frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1} = \frac{x_1-x_2}{x_2x_1}$. Puisque $x_1 < x_2$, $x_1-x_2 < 0$. D'autre part, $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_2x_1 > 0$. Par conséquent $g(x_2)-g(x_1) = \frac{x_1-x_2}{x_2x_1} < 0$, c'est à dire $g(x_1) > f(x_2)$, ce qui prouve que la fonction carré est décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Par symétrie, elle est donc décroissante sur $]-\infty;0[$.

e) Comparaisons d'inverses

Exemple 12:
Comparer les nombres suivants sans calcul, ni calculatrice :

1) $\frac{1}{1{,}37}$ et $\frac{1}{2{,}49}$.

2) $-\frac{1}{1{,}00001}$ et $-\frac{1}{1{,}00101}$.

2) Fonction homographiques

Définition

Une fonction *homographique* est une fonction définie par une expression de la forme

$$k(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$.

Propriété

L'ensemble de définition de la fonction homographique définie par $k(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ est

$$\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\} = \left]-\infty; -\frac{d}{c}\right[\cup \left]-\frac{d}{c}; +\infty\right[.$$

Démonstration
Avec la définition de la proposition, $k(x)$ n'existe pas quand $cx+d=0$, c'est à dire quand $x = -\frac{d}{c}$. L'ensemble de définition de la fonction k est donc l'ensemble de tous les réels différents de $-\frac{d}{c}$.

Exemple 13:
Considérons la fonction definie par $k(x) = \frac{2x+3}{3x-5}$.
Sa valeur interdite est la solution de l'équation$3x-5=0$, c'est à dire $x = \frac{5}{3}$.
Donc son ensemble de définition est $\mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}\right\}$.