Correction de l'épreuve du groupe 3
Mardi 19 avril 2016

Première partie (13 points)

Partie A - Questions préliminaires

1) Le triangle ABC est rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore :

$$\text{BC}^2 = \text{AB}^2 + \text{AC}^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad \text{BC} = 10 \text{ cm}$$

2) $\tan \widehat{\text{ABC}} = \dfrac{\text{AC}}{\text{AB}} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} = 0,75 \quad \Rightarrow \widehat{\text{ABC}} = \arctan(0,75) \approx 37°$

3) ADEF est un quadrilatère qui possède trois angles droits donc ADEF est un rectangle. Dans un rectangle les diagonales sont de même longueur donc AE = DF

Partie B - Étude analytique du problème

1) a) BD = AB − AD = 8 − 3 = 5 cm.

Dans le triangle ABC les droites (DE) et (AC) sont parallèles (car perpendiculaires à une même droite). D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{BD}}{\text{BA}} = \frac{\text{DE}}{\text{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5}{8} = \frac{\text{DE}}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \text{DE} = \frac{6 \times 5}{8} = \frac{15}{4} = 3,75 \text{ cm}$$

b) DEF est rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore (EF = AD car ADEF rectangle) :

$$\text{DF}^2 = \text{DE}^2 + \text{EF}^2 = \text{DE}^2 + \text{AD}^2 = 3,75^2 + 3^2 = 23,0625 \quad \Rightarrow \quad \text{DF} = \sqrt{23,0625}$$

2) a) $x \in [0\,;\,8]$. De $\text{AD} = x$ on a $\text{BD} = 8 - x$.

b) Comme à la question 1) a), dans le triangle ABC les droites (DE) et (AC) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{BD}}{\text{BA}} = \frac{\text{DE}}{\text{AC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{8-x}{8} = \frac{\text{DE}}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \text{DE} = \frac{6(8-x)}{8} = 6 - \frac{6x}{8} = 6 - 0,75x$$

c) Comme à la question 1) b), DEF est rectangle en E, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}\text{DF}^2 &= \text{DE}^2 + \text{EF}^2 = \text{DE}^2 + \text{AD}^2 = (6 - 0,75x)^2 + x^2 \\ &= 36 - 9x + 0,5625x^2 + x^2 = 1,5625x^2 - 9x + 36\end{aligned}$$

d) On peut retrouver le résultat de la question 1) b), en faisant $x = 3$. On trouve alors le résultat obtenu.

3) a) Proposition 2 : $\boxed{= 1,5625 * \text{A2} - 9 * \text{A2} + 36}$.

b) On recherche le minimum pour DF soit la colonne B. Les valeurs décroissent jusqu'à 23,0625 pour $x = 3$ puis augmentent. Le minimum de DF est donc obtenue pour une valeur de x comprises 2,5 et 3,5.

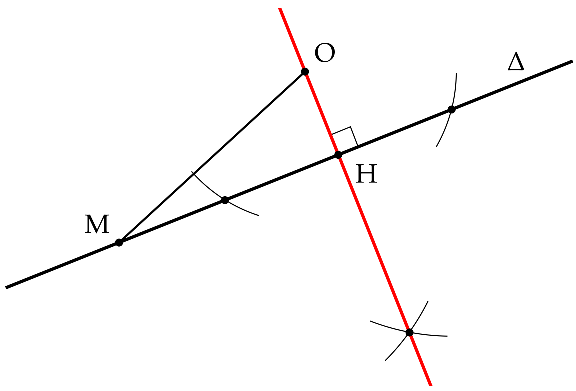
On recommence alors un tableau pour les valeurs de x, au dixième, entre 2,5 et 3,5. On obtient la valeur minimum de DF dans la colonne E de 23,406 correspondant à $x = 2,9$. Le minimum de DF est donc obtenue pour une valeur de x comprises 2,8 et 3,0.

On recommence alors un tableau pour les valeurs de x, au centième, entre 2,8 et 3,0.

c) On trouve $2,87 < x < 2,89$

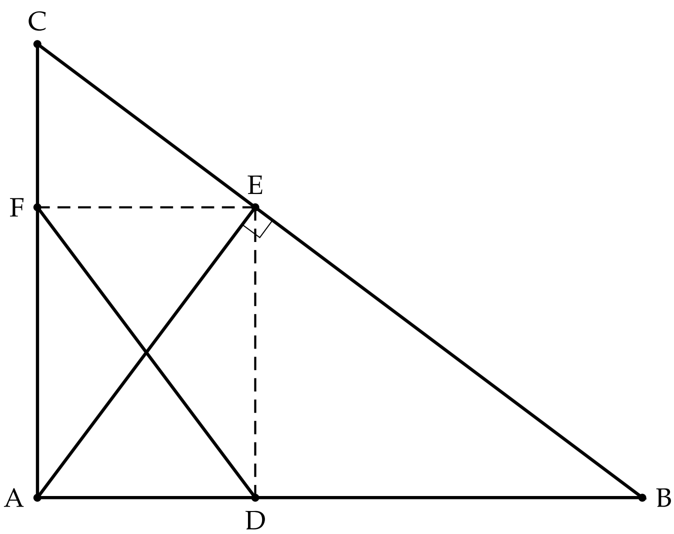
Partie C - Résolution du problème par une méthode géométrique

1) Construction usuelle d'une perpendiculaire à une droite passant par un point extérieur.



OMH est rectangle en H. L'hypoténuse est nécessairement plus grande que les deux autres côtés : OH < OM.

2) a) On obtient la figure suivante :



La distance minimale entre A et la droite (BC) est obtenue en construisant le projeté orthogonal de A sur (BC).

b) Soit $\mathscr{A}$ l'aire du triangle ABC :

$$\mathscr{A} = \frac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \quad \text{et} \quad \mathscr{A} = \frac{\text{BC} \times \text{AE}}{2} = \frac{10\text{AE}}{2} = 5\text{AE}$$

On en déduit AE et DF : $\text{AE} = \text{DF} = \dfrac{24}{5} = 4,8$ cm.

c) On cherche alors dans le dernier tableau la valeur de x qui correspond à $\text{DF} = 4,8^2 = 23,04$ on trouve alors $x = 2,88$

Remarque : Un autre façon plus compliqué de trouver x est de résoudre l'équation du second degré :

$$1,5625x^2 - 9x + 36 = 4,8^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1,5625x^2 - 9x + 12,96 = 0$$
$$\Delta = 9^2 - 4 \times 1,5625 \times 12;96 = 0 \quad \text{d'où} \quad x = \frac{9}{2 \times 1,5625} = 2,88$$

Une dernière façon consisterait à déterminer le "zéro" de la dérivée de la fonction $f(x) = 1,5625x^2 - 9x + 36$ mais complètement hors programme.

Deuxième partie (13 points)

EXERCICE 1

1) On appelle :
- d : la distance Terre - Soleil en m soit $d = 150\ 000\ 000 = 150 \times 10^9$ m
- c : la vitesse de la lumière en m/s soit $c = 3 \times 10^8$ m/s
- t : le temps en seconde mis par la lumière du Soleil à la Terre.

$$d = ct \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{d}{c} = \frac{150 \times 10^9}{3 \times 10^8} = 500 \text{ s}$$

On convertit en minutes secondes : $t = 500 \text{ s} = 8 \text{ mn } 20 \text{ s}$

2) 1 an = $365,25 \times 24 \times 3\ 600 = 31\ 557\ 600 = 3,155\ 760 \times 10^7$ s

1 AL = $3 \times 10^8 \times 3,155\ 760 \times 10^7 \approx 9,467 \times 10^{15}$ m = $9,467 \times 10^{12}$ km

Une année lumière correspond à 9 467 milliards de km !

3) a) 150 millions de km = $1,5 \times 10^8$ km

$$4,5 \times 10^9 \text{ km} = \frac{4,5 \times 10^9}{1,5 \times 10^8} = \frac{45}{1,5} = 30 \text{ UA}$$

b) Soit d la distance de la Terre au Soleil avec l'échelle proposée :

$$d = \frac{1}{30} \approx 0,033 \text{ m} = 3,3 \text{ cm}$$

Exercice 2

1) **Affirmation 1 : vraie**

   En effet pour trouver le poids de la bouteille vide, il faut soustraire au poids de la bouteille pleine, deux fois la différence de poids entre la bouteille pleine et la bouteille à moitié vide :

$$1\,215 - 2(1\,215 - 840) = 465$$

2) **Affirmation 2 : vraie**

   En effet pour trouver les élèves qui ne partent à la montagne ni l'hiver ni l'été, il faut soustraire aux 25 élèves, les 10 qui partent en hiver et les 8 qui partent en été auquel on rajoute les 5 qui sont parties en hiver et en été :

$$25 - 10 - 8 + 5 = 12$$

3) **Affirmation 3 : fausse**

   La droite tracée a une pente positive et la représentation de $f(x) = -3x + 1$ a une pente négative. On peut proposer le contre-exemple suivant :
   $f(2) = -3 \times 2 + 1 = -5$ qui correspond au point $(2\,;-5)$ or la droite tracée passe par le point $(2\,;4)$

4) **Affirmation 4 : fausse**

   Utilisons l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd de 2016 et 6102 :

$$\begin{aligned} 6102 &= 2016 \times 3 + 54 \\ 2016 &= 54 \times 37 + 18 \\ 54 &= 18 \times 3 \end{aligned}$$

   Donc $\operatorname{pgcd}(2016\,,\ 6102) = 18$

Exercice 3

1) a)
   - On multiplie 2 par 4 : $2 \times 4 = 8$
   - On ajoute 7 : $8 + 7 = 15$
   - On met au carré : $15^2 = 225$

   b)
   - On multiplie $\dfrac{1}{2}$ par 4 : $\dfrac{1}{2} \times 4 = 2$
   - On ajoute 7 : $2 + 7 = 9$
   - On met au carré : $9^2 = 81$

   Le nombre obtenu est 81.

2)
   - On multiplie a par 4 : $4a$
   - On ajoute 7 : $4a + 7$
   - On met au carré : $(4a + 7)^2 = 16a^2 + 56a + 49$

   Le nombre obtenu est bien $16a^2 + 56a + 49$

3) a) On a vu que le résultat peut s'écrire : $(4a+7)^2$

$$(4a+7)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4a+7=0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{4}{7}$$

b) On peut aussi mettre le résultat sous la forme $16a^2+56a+49$

$$16a^2+56a+49 = 49 \quad \Leftrightarrow \quad 16a^2+56a=0 \quad \Leftrightarrow \quad a(16a+56)=0$$

On trouve alors deux solutions : $a=0$ ou $a = -\frac{56}{16} = -\frac{7}{2}$

c) Comme le résultat est un carré, il ne peut être égal à -1. En conséquence, il n'y a pas de solution au problème.