Correction de l'épreuve du groupe 1
Mercredi 29 avril 2015

Première partie (13 points)

Partie A - Calcul de l'aire d'un polygone de Pick sur un exemple

Pour déterminer l'aire du polygone ABCDEF, on découpe cette aire en :
- un carré BCDF de côté 5 ;
- un triangle DEF rectangle isocèle en F tel que DF =5 ;
- un triangle ABF de base BF avec BF = 5 et de hauteur 4.

$$\mathscr{A}_{\text{ABCDEF}} = 5^2 + \frac{5 \times 5}{2} + \frac{5 \times 4}{2} = 25 + 12,5 + 10 = 47,5$$

Partie B - Utilisation de la formule de Pick sur un exemple

1) On compte les points intérieurs $i = 37$ et les points frontières $b = 23$

On applique la formule de Pick : $i + \dfrac{b}{2} - 1 = 37 + \dfrac{23}{2} - 1 = 37 + 11,5 - 1 = 47,5$

On retrouve bien l'aire de ABCDEF.

2)
- Polygone ABCDF : on trouve $i = 27$ et $b = 18$

  Avec la formule de Pick : $\mathscr{A}_1 = i + \dfrac{b}{2} - 1 = 27 + \dfrac{18}{2} - 1 = 27 + 9 - 1 = 35$
- Polygone DEF : on trouve $i = 6$ et $b = 15$

  Avec la formule de Pick : $\mathscr{A}_2 = i + \dfrac{b}{2} - 1 = 6 + \dfrac{15}{2} - 1 = 6 + 7,5 - 1 = 12,5$
- On additionne les deux aires : $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 = 35 + 12,5 = 47,5 = \mathscr{A}_{\text{ABCDEF}}$

Partie C - Quelques conséquences de la formule de Pick

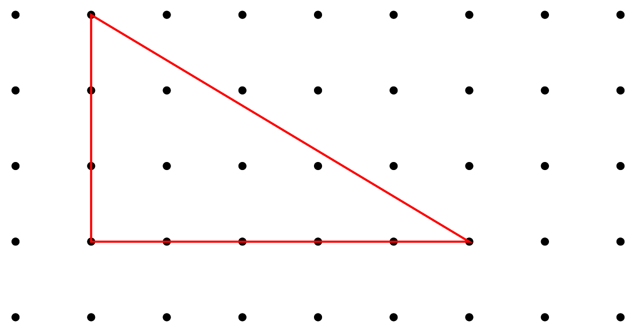
1) Si b est pair alors $\dfrac{b}{2}$ est un entier et donc $i + \dfrac{b}{2} - 1$ est entier différent de 7,5.

2) On a $i + \dfrac{b}{2} - 1 = 7,5$ comme $i \geqslant 0$ alors :

$$\frac{b}{2} - 1 \leqslant 7,5 \quad \Leftrightarrow \quad b \leqslant 2(1 + 7,5) \quad \Leftrightarrow b \leqslant 17$$

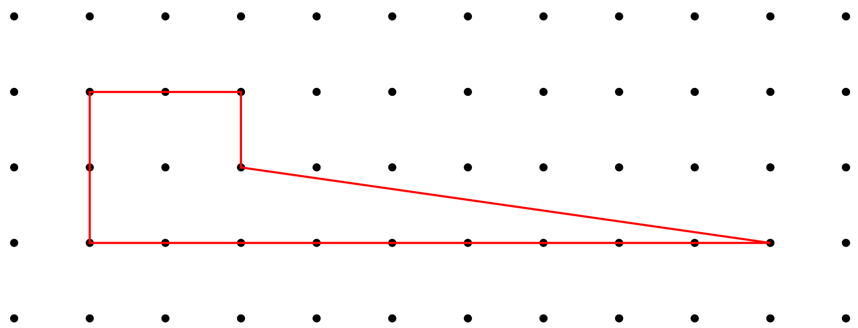
La valeur maximale de b est 17.

L'aire de 7,5 peut être obtenu avec un triangle rectangle : $\dfrac{3 \times 5}{2} = 7,5$



3) Si $i=1$ alors $1+\dfrac{b}{2}-1=7,5 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{b}{2}=7,5 \;\Leftrightarrow\; b=15$

Pour trouver un polygone répondant à ces conditions, on peut décomposer 7,5 en $4+3,5$ le polygone est alors formé d'un carré de côté 2 qui possède un point intérieur et un triangle rectangle dont les côté de l'angle droit sont de 7 et 1 comme sur la figure suivante :



4) Le nombre maximum de points frontières pour une aire donnée est obtenue lorsque $i=0$, on a alors :

$$\mathscr{A}=\frac{b}{2}-1 \;\Leftrightarrow\; b=2(\mathscr{A}+1)=2\mathscr{A}+2$$

Partie D - Démonstration de la formule de Pick dans le cas d'un rectangle

1)
- b est égal au périmètre en unité de longueur : $b=2(L+\ell)$
- i est égal à l'aire du rectangle dont les dimensions sont diminuée de 1 : $i=(L-1)(\ell-1)$

2) $i+\dfrac{b}{2}-1=(L-1)(\ell-1)+(L+\ell)-1=L\ell-L-\ell+1+L+\ell-1=L\ell=\mathscr{A}$

Deuxième partie (13 points)

Exercice 1

- A divise $111 = 3 \times 37$. Les diviseurs de 111 sont : 1, 3, 37, 111.
  $A \in \{1;\ 3;\ 37;\ 111\}$
- $B \geqslant 0$ et $B - A = 10k \quad \Leftrightarrow \quad B = A - 10k \geqslant 0$ avec $k \in \mathbb{N}$.
- Comme B est un cube donc $A - 10k$ est un cube.

On teste toutes les valeurs de A :

- $A = 1$ d'où $k = 0$ donc B = 1 = 1^3 solution.
- $A = 3$ d'où $k = 0$ donc B = 3 non cube, impossible.
- $A = 37$ les valeurs possibles pour k sont 0, 1, 2, 3 qui donne comme valeurs pour B : 37, 27 = 3^3 , 17, 7. Seule la valeur 27 est possible.
- $A = 111$ les valeurs possibles pour k sont 0, 1, 2, 3,4 , 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 qui donne comme valeurs pour B : 111, 101, 91, 81, 71, 61, 51, 41, 31, 21, 11, 1 = 1^3. Seule la valeur 1 est possible.

Il y a trois solutions : (1 , 1) ; (37 , 3) ; (111 , 1)

Exercice 2

1) 7 ℓ d'eau liquide donne 7,5 ℓ de glace.

2) 9 ℓ de glace donne 8,4 ℓ d'eau liquide.

3) Le volume de glace est proportionnel au volume d'eau liquide car la représentation est une droite qui passe par l'origine (fonction linéaire).

4) Soit t le pourcentage d'augmentation : $t = \dfrac{10,8 - 10}{10} \times 100 = 8\ \%$.

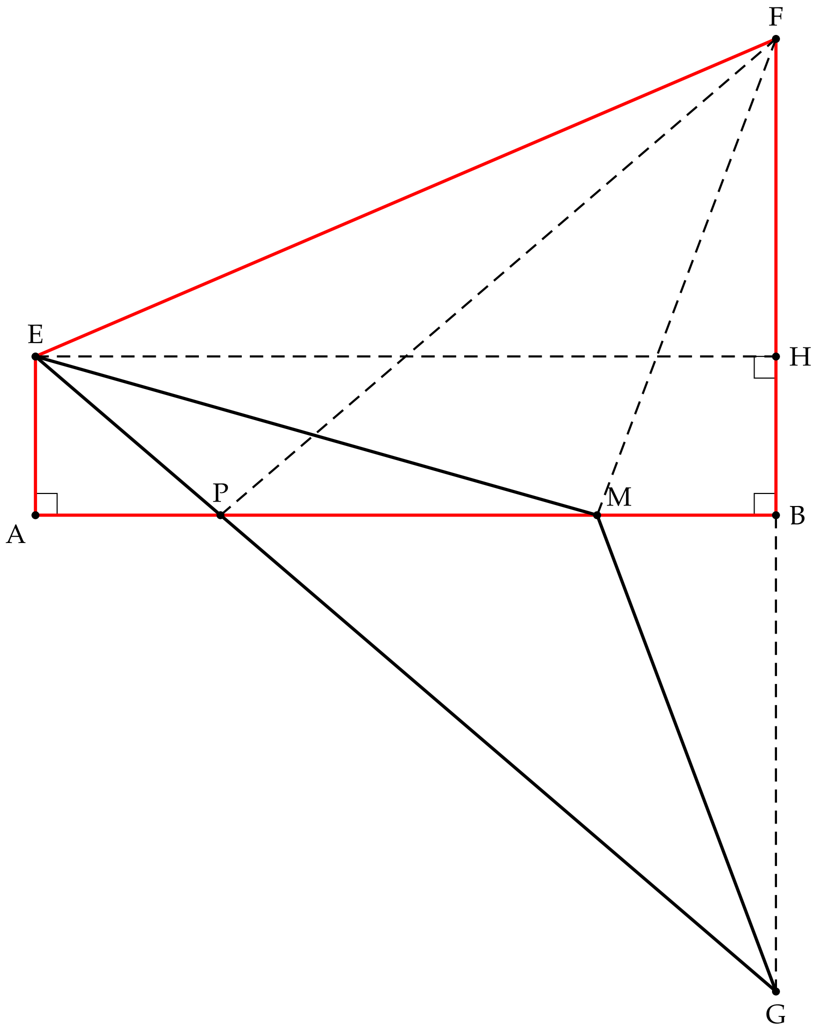
5) Le rapport k de proportionnalité est : $k = \dfrac{10,8}{10}$.

   Pour 20 m^3 d'eau liquide, on doit avoir $20k = 21,6\ m^3$ de glace.

   Pour 30 jours, on a alors : $30 \times 21,6 = 648\ m^3 = 648\ 000\ \ell$ de glace

Exercice 3

1) On obtient la figure suivante :



2) La ligne droite étant le chemin le plus court entre deux points :

$$\text{EM} + \text{MG} \geqslant \text{EP} + \text{PG}$$

Si G est le symétrique de F par rapport à la droite (AB), alors (AB) est la médiatrice du segment [FG], en conséquence, $\text{MG} = \text{MF}$ et $\text{PG} = \text{PF}$.

$\text{EM} + \text{MG} \geqslant \text{EP} + \text{PG} \Leftrightarrow \text{EM} + \text{MF} \geqslant \text{EP} + \text{PF}$.

$\text{EM} + \text{MF}$ minimal lorsque M est en P.

3) Les droites (AE) et (BG) sont parallèles et les droites (AB) et (EG) sont sécante en P, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\text{AP}}{\text{AB}} = \frac{\text{AE}}{\text{BG}} \Leftrightarrow \frac{\text{AP}}{14 - \text{AP}} = \frac{3}{9}$$

4) $\dfrac{\text{AP}}{14 - \text{AP}} = \dfrac{3}{9} \Leftrightarrow 9\text{AP} = 3(14 - \text{AP}) \Leftrightarrow 9\text{AP} = 42 - 3\text{AP} \Leftrightarrow$

$12\text{AP} = 42 \Leftrightarrow \text{AP} = \dfrac{42}{12} = \dfrac{7}{2} = 3,5$

5) Le distance minimale de $\text{EM} + \text{MF}$ correspond à EG.
Soit H la projection orthogonale de E sur la droite (BF). Les triangle EHG est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$$\text{EG}^2 = \text{EH}^2 + \text{HG}^2 = \text{AB}^2 + (\text{BF} + \text{AE})^2 = 14^2 + 12^2 = 340$$

$$\text{EG} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85} \approx 18,4 \text{ cm}$$