Correction de l'épreuve du groupe 3
Mercredi 29 avril 2015

Première partie (13 points)

Partie A - Étude de la situation concrète

1) a) En ce qui concerne les bords supérieur et inférieur, on peut effectivement inscrire une longueur de 3 et une longueur de 3. En ce qui concerne les bords latéraux, il faut vérifier que la hauteur du triangle équilatéral est inférieur à 3,5 cm.

Hauteur d'un triangle équilatéral de côté 4 : $h = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \Rightarrow h < 3,5$

On peut donc découper les deux paires d'yeux.

b) Ils ont effectivement le même périmètre car pour le carré $4 \times 3 = 12$ et pour le triangle équilatéral $3 \times 4 = 12$.

Il n'ont bien évidement pas la même aire, en effet :

$$\mathscr{A}_{\text{carré}} = 3^2 = 9 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_{\text{triangle}} = \frac{4 \times 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \approx 6,93 \text{ cm}^2$$

2) a) D'après les conditions fixée, on doit avoir :

- le même périmètre donc : $4x = 3y \quad \Leftrightarrow \quad 4x - 3y = 0$
- le carré et le triangle doivent s'inscrire sur les bords supérieur et inférieur donc : $x + y \leqslant 7$, comme la première condition implique que $y > x$ on pourra prendre comme condition $x + y = 7$
- le carré et le triangle doivent s'inscrire sur les bords latéraux donc :
  $2x \leqslant 7$ et $2h \leqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times \dfrac{y\sqrt{3}}{2} \leqslant 7 \quad \Leftrightarrow \quad y\sqrt{3} \leqslant 7$

Conclusion : x et y doivent vérifier : $\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ x + y = 7 \\ 2x \leqslant 7 \\ y\sqrt{3} \leqslant 7 \end{cases}$

b) Si l'on s'intéresse aux deux équations du système, on obtient $y = \frac{4}{3}x$ et $y = 7 - x$ qui correspondent aux fonctions f et g. En déterminant le point d'intersection I des deux représentations, on détermine les valeurs x et y qui vérifient les deux équations. Il reste ensuite à vérifier que ces deux valeurs vérifient les deux inéquations du système.

Graphiquement, on trouve : $\mathrm{I}(3\,;4)$ qui correspond à $x = 3$ et $y = 4$ qui d'après la question 1) vérifient les deux inéquations.

c) $\begin{cases} 4x - 3y = 0 & (\times 1) \\ x + y = 7 & (\times -4) \end{cases}$

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 0 \\ -4x - 4y &= -28 \\ \hline -7y &= -28 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

On remplace $y = 4$ dans la 2$^{\text{e}}$ équation

$$\begin{aligned} x + 4 &= 7 \\ x &= 7 - 4 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

On retrouve la solution graphique.

3) Calculons le nombre théorique de feuilles A3 :

- Surface S en mm^2 d'une feuille A3 : $S = 420 \times 297 = 124\,740$
- Surface s en mm^2 pour 1 élève : $s = 140^2 + 70 \times 35 = 22\,050$
- Surface S' en mm^2 pour les 25 élèves : $S' = 25s = 551\,250$

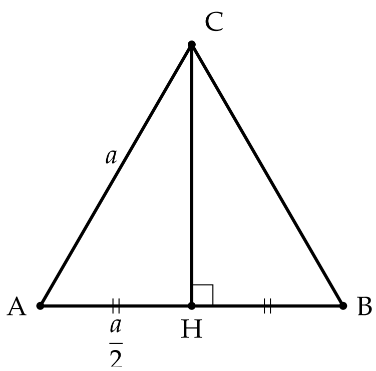
Le nombre théorique n de feuilles est de $n = \dfrac{S'}{S} = \dfrac{551\,250}{124\,740} \approx 4,4$

Il faudra au minimum 5 feuilles.

Remarque : On peut dans une feuille faire au maximum 6 carrés de 140 mm, soit pour 4 feuilles 24 carrés de 140 mm. Dans la cinquième feuille, on peut aisément faire un carré de 140 mm et 25 rectangles de 70 mm × 35 mm.

Partie B - Démonstration de résultats mathématiques

1) Faisons une figure :



Dans un triangle équilatéral la hauteur est confondue avec la médiane donc la hauteur (CH) coupe le côté [AB] en son milieu. Dans le triangle AHC rectangle en H, appliquons le théorème de Pythagore :

$$\mathrm{CH}^2 = \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AH}^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3\,a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{CH} = \sqrt{\frac{3\,a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

2) a) Le carré a comme périmètre $4x$ et le triangle équilatéral $3y = 3 \times \dfrac{4x}{3} = 4x$.
Le carré et le triangle équilatéral ont même périmètre.

b) $A_1 = x^2$ et $A_2 = \dfrac{1}{2} \times y \times h = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{4x}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} \times \dfrac{4x}{3}\sqrt{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}x^2$

On en déduit que le rapport entre les deux aires vaut : $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} \approx 0,77$

c) D'après la question a) les périmètres sont égaux et d'après b) comme le rapport des aires est différent de 1, les aires ne sont pas égales.

Deuxième partie (13 points)

EXERCICE 1

1) Entre 8h 10 et 9h 40, il y a 1h 30 = 1,5 h.

La vitesse moyenne v_r sur la route vaut donc : $v_r = \dfrac{27}{1,5} = 18$ km/h

2) 1h 45 = 1,75 h.

La vitesse moyenne v_s sur le sentier vaut : $v_s = \dfrac{28}{1,75} = 16$ km/h

La diminution de la vitesse moyenne est de : $\dfrac{18-16}{18} \times 100 \approx 11$ %

EXERCICE 2

1) Pour une masse de 70 g, le longueur ℓ du ressort vaut :

$$\ell = 14 + 0,5 \times \frac{70}{10} = 14 + 3,5 = 17,5 \text{ cm}$$

2) Pour une longueur de 28 cm, en appelant x la masse accrochée en g, on a :

$$14 + 0,5 \times \frac{x}{10} = 28 \quad \Leftrightarrow \quad 0,05x = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{14}{0,05} = 280 \text{ g}$$

3) La longueur du ressort n'est pas proportionnelle à la masse suspendue (ce sont les allongement qui le sont).
Contre- exemple : pour 10 g la longueur vaut 14,5 cm et pour 20 g la longueur vaut 15 cm. La longueur ne double pas lorsque l'on double la masse.

EXERCICE 3

1) On encadre le rationnel $\dfrac{p}{q}$ à 10^{-3}

$$1,117 < \frac{p}{q} < 1,118 \quad \Leftrightarrow \quad 1,117 < \frac{p}{1789} < 1,118 \quad \overset{\times 1789}{\Leftrightarrow} \quad 1998,313 < p < 2000,102$$

Il existe deux valeurs possible pour p : 1999 et 2000.

2) a) Faisons la différence des fractions pour les comparer :

- $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4-3}{6} = \dfrac{1}{6}$ donc $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{13}{14} - \dfrac{12}{13} = \dfrac{169-168}{182} = \dfrac{1}{182}$ donc $\dfrac{13}{14} > \dfrac{12}{13}$
- $\dfrac{177}{178} - \dfrac{176}{177} = \dfrac{31\,329 - 31\,328}{31\,506} = \dfrac{1}{31\,506}$ donc $\dfrac{177}{178} > \dfrac{176}{177}$

On peut donc conjecturer que $\dfrac{n}{n+1} > \dfrac{n-1}{n}$

b) $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n} = \dfrac{n^2 - (n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \dfrac{n^2 - n^2 + 1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$

Donc on a bien $\dfrac{n}{n+1} > \dfrac{n-1}{n}$

c) D'après la règle établie, la 1re fraction est supérieure à la 2e.

EXERCICE 4

1) On multiplie la probabilités d'avoir une certaine couleur par la probabilité d'avoir un certain nombre.

$P_1 = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{24}$

2) $P_2 = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$