Correction de l'épreuve du groupe 1
Mercredi 30 avril 2014

Première partie (13 points)

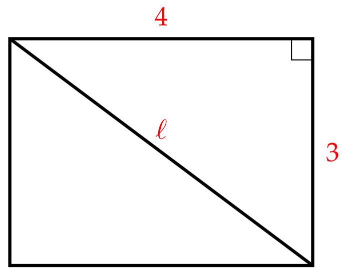
Partie A - Chez les Mayas

1) La diagonale d'un carré de côté a vaut $a\sqrt{2}$.

$$\frac{a\sqrt{2} \times a\sqrt{2}}{2} = \frac{2a^2}{2} = a^2 = \mathscr{A}_{\text{carré}}$$

La formule des Mayas donne la valeur exacte de l'aire du carré.

2) Dans un rectangle les diagonales ont même longueur.
Calculons la longueur ℓ d'une diagonale par le théorème de Pythagore :
$\ell^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25 \quad \Rightarrow \quad \ell = 5$
Le demi produit des diagonales vaut :
$\dfrac{5 \times 5}{2} = \dfrac{25}{2} = 12,5 \text{ cm}^2$

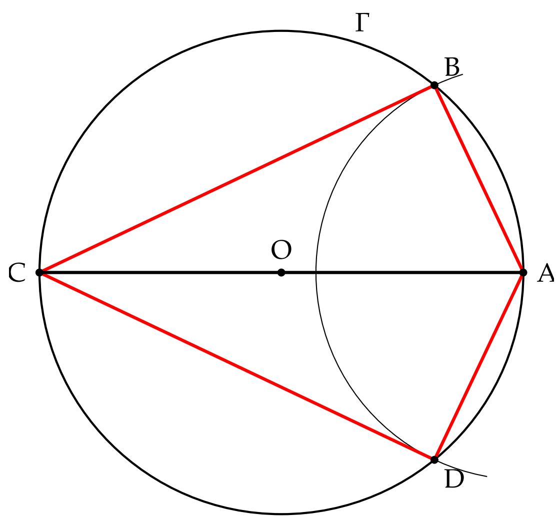


La formule des Mayas ne donne pas la valeur exacte de l'aire du rectangle qui vaut : $3 \times 4 = 12 \text{ cm}^2$

Partie B - Chez les indiens

1) **Étude d'une configuration particulière**

a) On obtient la figure suivante : (cerf-volant isocèle)



b) (AC) est un axe de symétrie du cercle Γ, donc le symétrique D de B par rapport à A est sur le cercle Γ. ABCD est donc inscrit dans le cercle Γ.

c) Le quadrilatère étant symétrique par rapport à (AC), on a :

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} \quad \text{et} \quad \mathrm{CB} = \mathrm{CD}$$

Le demi périmètre p vaut : $p = \mathrm{AB} + \mathrm{BC}$

On a donc :

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(p - \mathrm{AB})(p - \mathrm{BC})(p - \mathrm{CD})(p - \mathrm{DA})} \\ &= \sqrt{\mathrm{BC} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BC}} \\ &= \sqrt{\mathrm{AB}^2 \times \mathrm{BC}^2} = \mathrm{AB} \times \mathrm{BC} \end{aligned}$$

d) Le triangle ABC est inscrit dans le cercle Γ et [AC] est un diamètre donc le triangle ABC est rectangle en B. De plus comme le quadrilatère ABCD est symétrique par rapport à (AC), on a :

$$\mathscr{A}_{\mathrm{ABCD}} = 2\mathscr{A}_{\mathrm{ABC}} = 2 \times \frac{\mathrm{AB} \times \mathrm{BC}}{2} = \mathrm{AB} \times \mathrm{BC}$$

On retrouve la valeur Brahmagupta

2) **Étude d'une autre configuration particulière : le rectangle**

a) Un rectangle a des diagonales de même longueur. Il est ainsi inscriptible dans un cercle dont le diamètre a même longueur que les diagonale du rectangle.

b) Le demi-périmètre du rectangle vaut : $p = L + \ell$, on a :

$$S = \sqrt{(p - L)(p - \ell)(p - L)(p - \ell)} = \sqrt{\ell \times L \times \ell \times L} = \sqrt{L^2 \times \ell^2} = L \times \ell$$

Partie C - À l'ère du tableur

1) Le demi-périmètre du rectangle vaut 7 cm. La somme de la longueur et de la largeur vaut 7 cm, donc x est compris entre 0 et 7.

2) **Étude graphique**

a) Si l'aire du rectangle vaut 10 cm, on obtient deux solutions sur la courbe $x = 2$ et $x = 5$ qui correspondent respectivement à la largeur et la longueur du rectangle. Le rectangle a comme dimensions 2 cm $\times$ 5 cm.

b) L'aire maximum est obtenu pour $3 < x < 4$.

c) L'aire maximale est alors comprise entre 12 cm^2 et 13 cm^2.

3) **Poursuite de l'étude à l'aide du tableur**

a) On a : $A(x) = x(7 - x)$

On peut propose la formule : $\boxed{= \mathrm{B1} * (7 - \mathrm{B1})}$.

b) On obtient pour x l'encadrement suivant : $3,4 < x < 3,6$.
La valeur de l'aire maximale $\approx 12,25\ \text{cm}^2$.

4) **Détermination des valeurs exactes**

a) C'est la forme canonique de $A(x)$. On développe la forme founie :

$$\frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} - x^2 + 7x - \frac{49}{4} = -x^2 + 7x = x(7-x) = A(x)$$

b) $A(x)$ est maximale si $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ est minimale donc quand $x - \frac{7}{2} = 0 \Leftrightarrow$ $x = \frac{7}{2} = 3,5$.

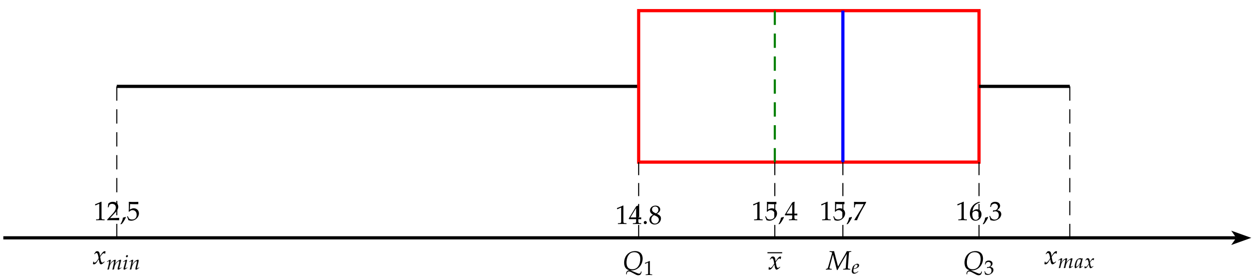
La valeur maximale de $A(x)$ est alors : $A_{\text{max}} = \frac{49}{4} = 12,25\ \text{cm}^2$.

c) Le rectangle de périmètre 14 cm et d'aire maximale est un carré de côté 3,5 cm.

Deuxième partie (13 points)

EXERCICE 1

On peut éventuellement faire le diagramme en « *boîte* » de la série statistique :



1) Le dernier arrivé correspond au temps maximum : $12,5 + 4,2 = 16,7$ mn.

2) Pour calculer la somme S des 200 performances, on multiplie la valeur moyenne par 200 :

$$S = 200 \times \overline{x} = 200 \times 15.4 = 3\,000 \text{ mn}$$

3) Si Ariane est arrivée 13ᵉ, elle se trouve donc dans le premier quart. Son temps est alors compris entre 12,5 mn et 14,8 mn.

4) La moyenne est inférieure à la médiane, c'est à dire qu'il y a plus de valeur au dessus de la moyenne que de valeur en dessous. L'affirmation est donc vraie.

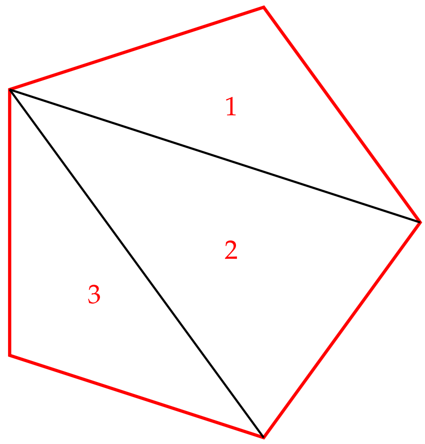
EXERCICE 2

1) **Affirmation 1 vraie** : Soit a le plus petit entiers des 5 entiers consécutifs. On a alors :

$$S = a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) = 5a + 10 = 5(a+2)$$

S est donc un multiple de 5.

2) **Affirmation 2 vraie** : Un pentagone peut être diviser en trois triangles. On sait que la somme des angles d'un triangle vaut 180°. La somme des angles d'un pentagone vaut alors : $3 \times 180 = 540°$.



3) **Affirmation 3 fausse** : Si l''échelle est de $1/50$, le coefficient de réduction k des longueur vaut : $k = \dfrac{1}{50}$. Les aires sont alors multipliées par k^2. Les aires sur le plan sont donc $50^2 = 2\,500$ fois plus petites que les aires réelles.

4) **Affirmation 4 vraie** : On a $1001 = 143 \times 7$. Donc 1001 nuits correspondent à 143 semaines complètes. Comme elle commence un lundi, la 1001ᵉ nuit sera alors un dimanche.

EXERCICE 3

1) Soit t_1 le temps mis par le cycliste pour relier A à B à la vitesse de 30 km/h. On a alors :

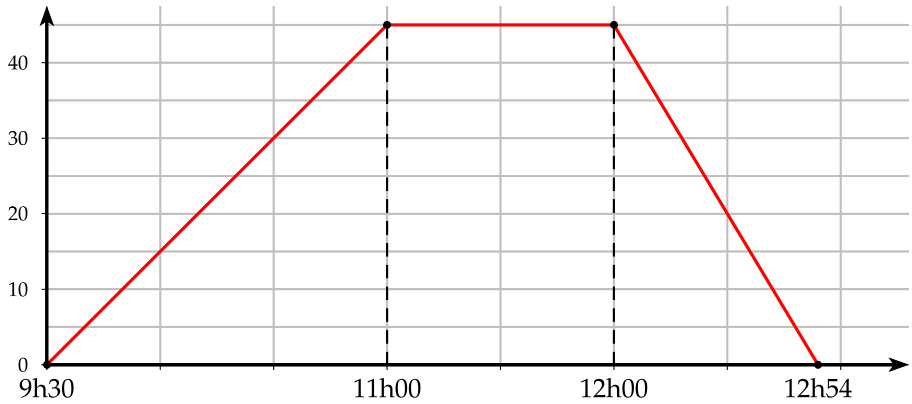
$$t_1 = \frac{AB}{30} = \frac{45}{30} = 1,5 = 1 \text{ h } 30 \text{ mn}$$

L'heure d'arrivée T_1 est alors : $T_1 = 9 \text{ h } 30 + 1 \text{ h } 30 = 11 \text{ h } 00$

2) Pour tracer la représentation, il est nécessaire de calculer le temps t_2 mis pour relier B à A à la vitesse de 50 km/h

$$t_2 = \frac{AB}{50} = \frac{45}{50} = 0.9 = 0 \text{ h } 54 \text{ mn}$$

On obtient la représentation suivantes :



3) T_2 l'heure du retour en A, correspond à l'heure du départ plus 1h 30 à l'aller, plus 1h de pause et 54 mn pour le retour :

$$T_2 = 9\text{ h }30 + 1\text{ h }30 + 1\text{ h }00 + 0\text{ h }54 = 12\text{ h }54$$

EXERCICE 4

1) On suppose que les 7 expériences sont réalisées de façons identiques et indépendantes (conditions de la loi de Bernoulli). On a alors autant de chances à la 7ᵉ expérience d'obtenir un 1 que d'obtenir un 3.

2) Il y a $4^2 = 16$ scores possibles avec deux dé tétraédriques.

   a) On a 6 scores ne contenant qu'un seul 1 : (1,2) ; (1,3) ; (1 ;4) ; (2,1) ; (3,1) ; (4,1).

$$P_1 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$

   b) On a 6 scores dont le 2ᵉ lancer est supérieur au 1ᵉʳ : (1,2) ; (1,3) ; (1 ;4) ; (2,3) ; (2,4) ; (3,4).

$$P_2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 0,375$$