Ministère de l'éducation nationale

Session 2014

PE2-14-2-PG2
Repère à reporter sur la copie

CONCOURS DE RECRUTEMENT DE PROFESSEURS DES ÉCOLES

Mercredi 30 avril 2014 – de 9h00 à 13h00
Deuxième épreuve d'admissibilité

Mathématiques	Durée : 4 heures Épreuve notée sur 40

Rappel de la notation :
- première partie : **13 points**
- deuxième partie : **13 points**
- troisième partie : **14 points**

5 points au maximum pourront être retirés pour tenir compte de la correction syntaxique et de la qualité écrite de la production du candidat.

Une **note globale égale ou inférieure à 10 est éliminatoire**.

Ce sujet contient 9 pages, numérotées de 1/9 à 9/9. Assurez-vous que cet exemplaire est complet.
S'il est incomplet, demandez un autre exemplaire au chef de salle.

L'usage de la calculatrice électronique de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante est autorisé.

L'usage de tout autre matériel électronique, de tout ouvrage de référence et de tout document est rigoureusement interdit.

N.B : Hormis l'en-tête détachable, la copie que vous rendrez ne devra, conformément au principe d'anonymat, comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine etc.
Tout manquement à cette règle entraîne l'élimination du candidat.

Si vous estimez que le texte du sujet, de ses questions ou de ses annexes comporte une erreur, signalez lisiblement votre remarque dans votre copie et poursuivez l'épreuve en conséquence. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner explicitement.

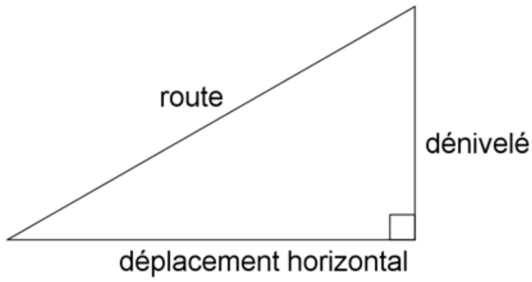
PREMIÈRE PARTIE

13 POINTS

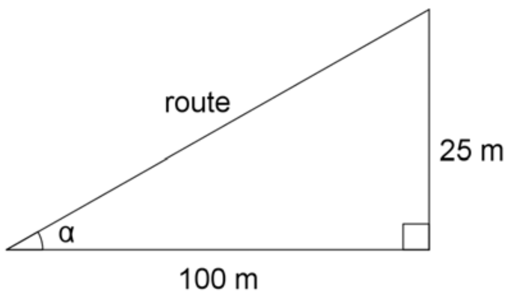
Albert part dans les Alpes Autrichiennes, dans la mythique station de ski de Kitzbühel.
Suivons-le dans son périple et ses diverses activités.

A. La montée à la station

Sur le dernier tronçon de route montant à la station en ligne droite, Albert a vu un panneau signalant une pente constante de 25%. La pente est le rapport entre le dénivelé et le déplacement horizontal (théorique).



Ainsi une pente de 25% indique un dénivelé de 25 m pour un déplacement horizontal de 100 m.



La figure n'est pas à l'échelle

On note α l'angle que la route forme avec l'horizontale. Cet angle est appelé l'inclinaison de la route.

1. Calculer, au degré près, l'inclinaison du dernier tronçon de la route empruntée par Albert.

2. Ce tronçon de route permet de s'élever de 145 m. Calculer sa longueur, au mètre près.

B. Ski sur la Streif

Sitôt arrivé, Albert décide de dévaler la piste appelée Streif, réputée la plus difficile au monde.

Voici quelques caractéristiques de cette piste :

- Longueur totale : 3312 m
- Pente maximale : 85 %
- Pente minimale : 5 %
- Dénivelé : 862 m

1. Albert s'élance dans la descente à 14 h 58 min 47 s et termine la descente à 15 h 03 min 08 s. Calculer sa vitesse moyenne durant cette descente, en km/h, arrondie au dixième.

2. Le meilleur skieur de la station a réalisé la descente à la vitesse moyenne de 100 km/h. S'il s'était lancé dans la descente au même instant qu'Albert, combien de temps avant lui serait-il arrivé ?

C. Saut sur la Streif

Lors de sa descente de la Streif, Albert effectue un saut.

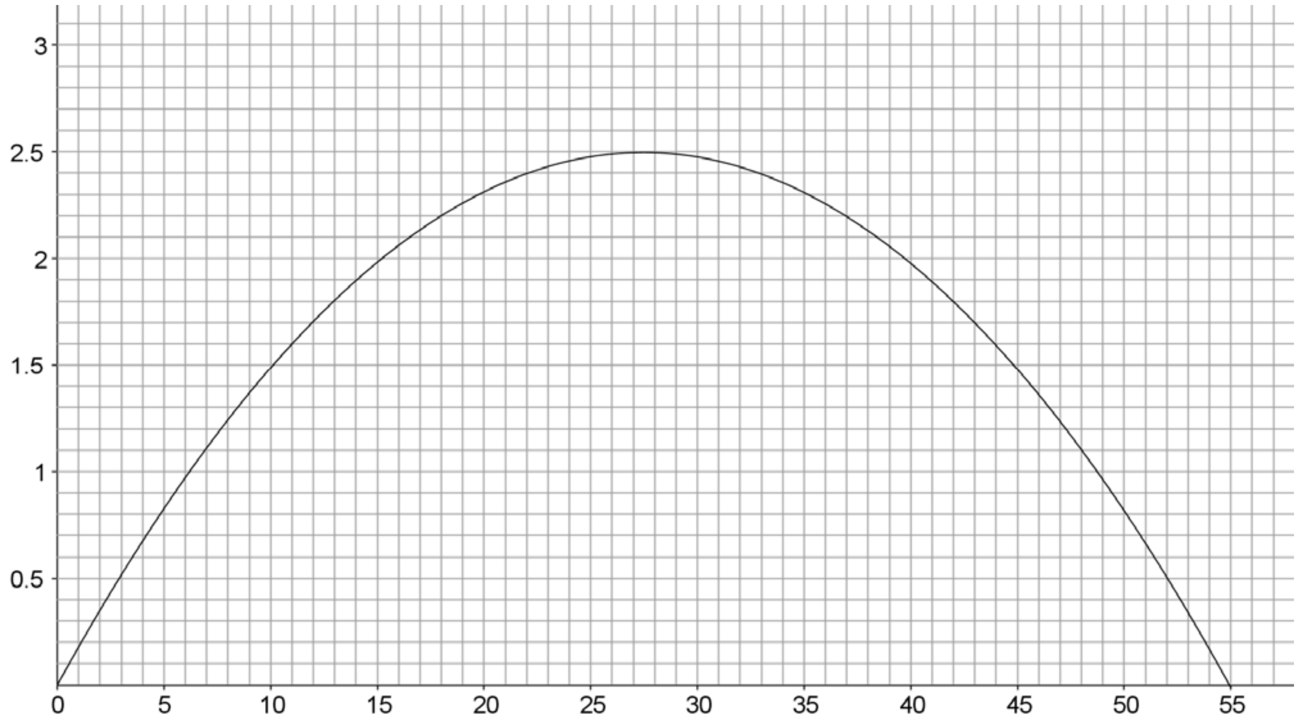
On admet que la hauteur du saut d'Albert par rapport au sol de la piste s'exprime en fonction du déplacement horizontal, x, par la fonction *S* suivante :

$$S : x \longmapsto 2{,}5 - \frac{(2x-55)^2}{1210},$$

x et $S(x)$ étant exprimés en mètre.

1. Calculer l'image de 10 par la fonction *S*. Interpréter ce résultat en ce qui concerne le saut d'Albert.

2. On a tracé la courbe représentative de cette fonction *S*.



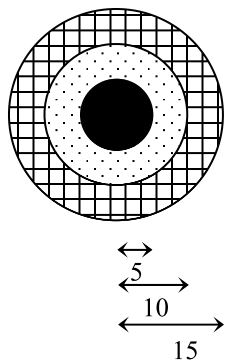
a) Que représente, pour Albert, la valeur 55 sur l'axe des abscisses ?

b) Déterminer graphiquement quelle a été la hauteur maximale du saut d'Albert. A quel déplacement horizontal cette valeur correspond-elle ?

3. À l'aide de l'expression de la fonction *S*, retrouver, par le calcul, la hauteur maximale du saut d'Albert.

D. Tir à la carabine

Albert observe ensuite un entraînement au tir à la carabine sur une cible.
La cible est constituée de trois disques concentriques de rayons respectifs 5 cm, 10 cm et 15 cm, comme schématisé ci-contre.



Les mesures des rayons ci-dessus sont en centimètres

Un débutant touche la cible une fois sur deux.
Lorsqu'il atteint la cible, la probabilité qu'il atteigne une zone donnée est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. Un tireur débutant touche la cible. Quelle probabilité a-t-il d'atteindre la couronne extérieure (partie quadrillée) ?

2. Un tireur débutant va appuyer sur la détente. Quelle probabilité a-t-il de toucher la cible et d'atteindre son cœur (partie noire) ?

DEUXIÈME PARTIE
13 POINTS

Cette partie est composée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1 :

En classe de CM2, un professeur propose l'exercice suivant :

> Mathis a effeuillé des fleurs à 5 pétales en disant « j'aime les maths... un peu…, beaucoup…, passionnément …, à la folie ». Il a ôté 83 pétales en tout. Il n'est passé à la fleur suivante que lorsqu'il avait complètement effeuillé la fleur précédente.
> Combien de fleurs a-t-il effeuillées en totalité ? Sur la dernière fleur qu'il a effeuillée, reste-t-il des pétales ?

1. De quelle opération mathématique ce problème relève t-il ?

2. Proposer trois procédures possibles pour répondre à la question posée.

EXERCICE 2 :

Emma propose à son ami Jules de lui donner ses bonbons à la condition qu'il trouve exactement combien elle en a. Emma lui dit qu'elle a moins de 100 bonbons et que lorsqu'elle les regroupe par deux, trois, quatre, cinq ou six, il lui en reste toujours un.

1. Combien Emma a-t-elle de bonbons ? Justifier la réponse en explicitant la démarche utilisée.

2. Pour vérifier sa réponse, Jules décide d'utiliser un tableur. Pour cela, il utilise la fonction MOD (*nombre* ; *diviseur*), qui donne le reste de la division euclidienne du *nombre* par le *diviseur*.

Jules a prévu de calculer en colonne les restes de la division euclidienne des nombres de la colonne A par 2, 3, 4, 5 et 6.

	A	B	C	D	E	F
1		2	3	4	5	6
2	1					
3	2					
4	3					
5	4					
6	5					
7	6					
8	7					
9	8					
10	9					
11	10					
12	11					
13	12					
14	13					
15	14					

a) Parmi les formules suivantes, en choisir une qui pourrait être insérée dans la cellule B2 et qui pourrait, en étant étendue vers le bas, compléter correctement la colonne B :

= MOD (1 ; 2)	= MOD (A2 ; B1)	= MOD (A2 ; 2)
= MOD (1 ; B1)	= MOD (A2 ; B$1)	= MOD (2 ; 1)

b) Jules a rempli de la même façon le reste du tableau. Comment peut-il l'utiliser pour résoudre ce problème ?

EXERCICE 3 :

On effectue à la calculatrice les calculs ci-dessous :

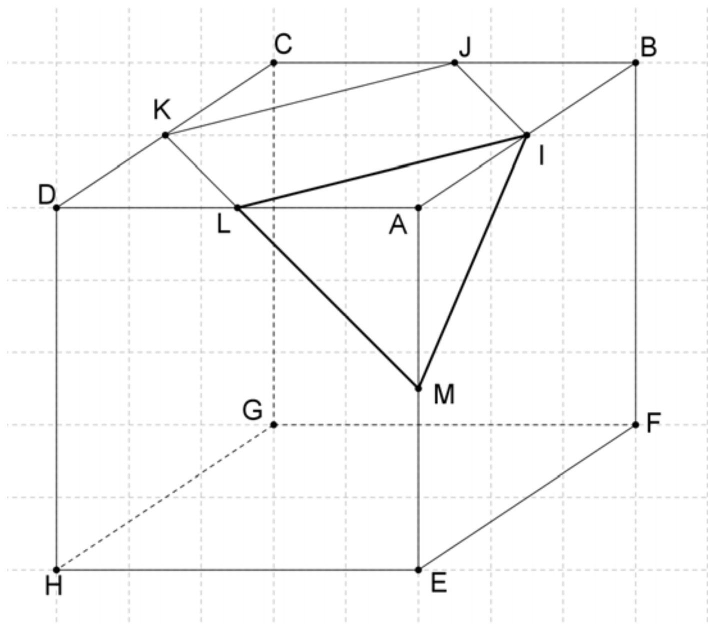
$123^2 - 122^2 - 121^2 + 120^2 = 4$
$45^2 - 44^2 - 43^2 + 42^2 = 4$

1. Tester ce résultat surprenant sur une autre série de quatre nombres consécutifs et émettre une conjecture.

2. Prouver que la conjecture faite précédemment est vraie.

EXERCICE 4 :

Soit ABCDEFGH un cube de côté 12 cm.
On note I le milieu de [AB], J celui de [BC], K celui de [CD], L celui de [AD] et M celui de [AE].



1. Démontrer que IJKL est un carré.

2. Calculer l'aire du carré IJKL (en cm²).

3. AILM est une pyramide à base triangulaire. Calculer le volume de cette pyramide (en cm^3).

Rappel : volume d'une pyramide $= \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$

4. On ôte au cube en chacun de ses huit sommets une pyramide identique à AILM pour créer un nouveau solide. Vérifier que le volume de ce nouveau solide est 1440 cm^3.

TROISIÈME PARTIE

14 POINTS

Un enseignant traite la proportionnalité avec des élèves de cycle 3.

A. L'enseignant s'interroge sur l'énoncé d'un exercice, pour lequel une phrase (notée […]) reste à préciser :

Pour une visite du Château de Versailles, la coopérative scolaire doit payer 105 € pour une classe de 25 élèves de CE1. Mais un groupe de 20 élèves de CE2 se joint finalement à cette classe. […] Combien la coopérative devra-t-elle payer en tout ?

1. Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation soit sans ambiguïté une situation de proportionnalité.

2. Proposer une phrase complétant l'énoncé pour que cette situation ne soit pas une situation de proportionnalité.

B. L'enseignant propose l'institutionnalisation de la proportionnalité ci-dessous à partir de celle proposée dans le manuel « *Outils pour les maths* » - *CM1 – Magnard – édition 2011* :

On reconnaît une situation de proportionnalité lorsque le rapport entre les nombres ne change pas.

Exemple 1 : ***1 kg de pêches coûte 3 €.***

Nombre de kg de pêches	1	2	5
Prix (en €)	3	6	15

Le prix est proportionnel à la masse .
Pour trouver le prix, il faut multiplier par le même nombre (par 3).

Exemple 2 : ***4 gâteaux coûtent 6 €.***
Pour trouver le prix de 8 gâteaux, je calcule le double. → 6 × 2 = 12 €
Pour trouver le prix de 2 gâteaux, je calcule la moitié. → 6 divisé par 2 = 3 €

Exemple 3 : ***1 stylo coûte 2 €, 3 stylos coûtent 5 €, 6 stylos coûtent 6 €.***
Dans cette situation, 3 stylos ne coûtent pas **3 fois plus cher** qu'un stylo, 6 stylos ne coûtent pas 6 fois plus cher.
Cette situation n'est pas proportionnelle.

1. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 1 illustre-t-il ?

2. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité le traitement de l'exemple 2 illustre-t-il ?

3. Dans cet extrait de manuel, l'expression « rapport entre les nombres » désigne dans le traitement des exemples 1 et 2, des coefficients jouant des rôles différents.
Expliciter ces différents rôles.

4. Quelle propriété caractéristique de la proportionnalité est utilisée dans le traitement de l'exemple 3 ? Donner une autre façon de mettre en évidence que la situation n'est pas une situation de proportionnalité, faisant appel à une autre propriété caractéristique.

C. L'enseignant propose un autre exercice :

Lorsque je fais une mousse au chocolat pour 8 personnes, j'utilise 6 œufs. Quand je fais une mousse au chocolat pour 12 personnes, j'utilise 9 œufs. Combien faudra-t-il d'œufs si je fais une mousse au chocolat pour 20 personnes ?

Analyser les quatre productions des élèves ci-dessous, en précisant les propriétés mathématiques implicitement mobilisées.

Auriane Je cherche pour une personne 6 : 8 = $\begin{array}{r\|l} 6 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 0,75 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$ Je cherche pour 20 personnes 20×0,75 = $\begin{array}{r} 0,75 \\ \times\ 20 \\ \hline 15,00 \end{array}$ Il faut 15 oeufs	Emeric 8 + 12 = 20 6 + 9 = 15 Il faut 15 oeufs
Nicolas 8 + 12 = 20 6 + 12 = 18 Il faut 18 oeufs	Kévin Pour 8 personnes, il faut 6 oeufs. Donc, pour 1 personne il en faut 8 fois moins pour 20 personnes, 20 fois plus. 6 × 20 : 8 = $\begin{array}{r} 6 \\ \times\ 20 \\ \hline 120 \end{array}$ $\begin{array}{r\|l} 120 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 15 \\ 0 & \end{array}$ Il faut 15 oeufs.

D. L'enseignant propose un dernier exercice :

Dans une ville, il y a deux médiathèques. Le service culturel de cette municipalité effectue un recensement des fonds d'ouvrages de chaque établissement. À cette fin, les documentalistes ont relevé les éléments suivants : - à la médiathèque Jean JAURÈS, on peut trouver 5000 ouvrages dont 40% de romans ; - à la médiathèque George SAND, on peut trouver 4000 ouvrages dont 60% de romans. Calculer le pourcentage de romans au sein du service culturel de la ville.

1. Pourquoi cet exercice s'inscrit-il dans une séquence d'apprentissage traitant de la proportionnalité ?

2. Après une phase de recherche individuelle, l'enseignant organise une phase de mise en commun.
   Paul dit : « J'ai trouvé 50% parce que c'est exactement entre 40% et 60% ».

   a) Quelle erreur de raisonnement Paul commet-il ?

   b) Par quel nombre faudrait-il remplacer 5000 pour que 50% soit la bonne réponse ? Justifier la réponse.