Numération

Table des matières

1 Notre système de numération

1.1 Définition

Notre système de numération est un système décimal de position. Il est constitué de 10 chiffres dont la position indique le nombre d'unités de la puissance de 10 indiquée par le rang.

$$3405 = 3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 5 \times 10^0$$

Il a fallu attendre le XII$^{\text{e}}$ siècle pour que ce système inventé en Inde arrive en occident.

1.2 Avantages et difficultés de ce système

1.2.1 Avantages

- Utilisation d'un petit nombre de symboles (10)
- Facilité de lecture quelque soit l'importance du nombre
- Symboles abstraits simples à écrire
- Aucune limitation de la taille du nombre.
- Facilité des opérations ($+$, $-$, $\times$, $\div$) grâce à des algorithmes simples.
- Algorithme de formation simple $10u = 1d$, on décale d'un rang en mettant un 1 dans le rang supérieur et un zéro 0 dans de rang considéré.

1.2.2 Inconvénients

- Symboles abstraits qui ne donne pas de renseignements sur la quantité qu'il représente.
- Différence entre l'oralité (système mixte) et l'écriture chiffrée (système de position).
  exemples « quatre-vingt douze » ne s'écrit pas 8012, « sept cent trois » ne s'écrit pas 7003
- L'algorithme de formation peut poser quelques problèmes : 158, 159, 200 ... (passage de 9 à 0).

1.3 Écriture en lettres, oralité

Irrégularité jusqu'à 100 du fait de la variation du système et de la base au cours du temps. Hésitation en effet entre la base 10 et la base 20 : « onze, douze, ..., seize, dix-sept, dix-huit » ou « cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts ». De plus on dit « vingt **et** un » mais « vingt deux »

Après cent : on utilise une base de 100 associé à un nom pour chaque puissance de mille : « mille, million, milliard, billion, billiard ... ». Quelques exceptions par exemple pour les dates : on dit parfois « onze cents » pour « mille cent ». Le terme billion n'est pas utilisé du fait que dans les pays anglo-saxon il signifie million : on dit par exemple « cent mille milliards de poèmes ».

2 Petit historique de la numération

2.1 Le système additif : l'écriture égyptienne hiéroglyphique

La base choisie est la base 10. On a un symbole pour chaque puissance de 10 et on répète ce symbole autant de fois qu'il y a d'unités dans cette puissance.

|:1 2 : 10 3 : 100 4 : 1 000 5 : 10 000 6 : 100 000 7 : 1 000 000

7659 :	4444 444	333 333	222 22	||| ||| |||

2.2 Le système additif mésopotamien

La base cette fois-ci est 60 : sexagésimale. On pense que cette base serait la fusion entre la base 5, la base 10 et la base 12. On a un symbole pour chaque puissance de 60 : 60^1, $60^2 = 3\,600$, $60^3 = 118\,000$. De plus, pour indiquer les unités dans une puissance de 60, il y a une base 10 intermédiaire donnant ainsi les symboles pour 10, 600 et 36 000. Nous avons gardé cette base pour les unités de temps et les mesures d'angles.

$$9\text{h}\ 32'\ 15'' = 9 \times 60^2 + 32 \times 60^1 + 15 = 34\,335 \text{ secondes}$$

2.3 Le système romain

La base est 10 avec une base intermédiaire à 5. Les symboles sont :

I = 1 , V = 5 , X = 10 , L = 50 , C = 100 , D = 500 , M = 1 000 , $\overline{\text{V}} = 5\,000$, $\overline{\text{X}} = 10\,000$, ...

A ceci, on adopte un système soustractif si un symbole (puissance de dix), est placé devant un symbole supérieur :

Par exemple : IV = 4 , IX = 9 , XL = 40 , CD = 400 , CM = 900.

45	1973	1995	7659
XLV	MCMLXXIII	MCMXCV	$\overline{\text{V}}$MMDCLIX

2.4 Systèmes hybrides

2.4.1 Système hybride partiel

Ce système comprend le symbole de l'unité (|) plus un symbole pour chaque puissance de 10 dans un système décimal.
Exemple : si on note X, C et M les symboles respectifs des puissances de 10 : 10^1, 10^2 et 10^3, on a alors :

7 659 :	|||| |||	M	||| |||	C	||| ||	X	||||| ||||

2.4.2 Système hybride

Ce système est basé sur 9 symboles représentants les chiffres de 1 à 9, puis un symbole pour chaque puissance de 10 si le système est décimal. C'est le système utilisé par les chinois ou notre système d'écriture en lettres des nombres. L'inconvénient est donc d'avoir un symbole pour chaque puissance de 10.
Exemple : si on utilise les chiffres de 1 à 9 et si on note X, C et M les symboles respectifs des puissances de 10 : 10^1,10^2 et 10^3, on a alors :

$$7\,659 = 9\text{M }6\text{C }5\text{X }9$$

2.5 Système de position

On a utilisé le système de position à Babylone, en Chine et chez les Mayas. Le système de position consiste à associer un chiffre et un rang. Le chiffre zéro sert à indiquer l'absence d'unité pour un rang donné.
Les Mayas possédaient 2 chiffres : le un « • » et le cinq « —— ». Le zéros était noté avec un coquillage « ». Leur système était en base 20 avec une irrégularité au 3e rang : 360 au lieu de $20^2 = 400$. Cette irrégularité serait dû à l'identification aux nombres de jours dans une année.

exemples avec 72, 2 980

2.6 Systèmes avant l'écriture

Avant l'écriture, les humains notaient les nombres avec :
- Un système d'entailles.
- Avec la main
- Avec une ficelle et des nœuds.

3 Notion de base

3.1 Définition

Définition 1 : Dans un système de position en base n, on note par exemple un nombre de trois chiffres par $\overline{abc}^{\,n}$. Ce nombre s'écrit dans notre système décimal de position par :

$$\overline{abc}^{\,n} = a \times n^2 + b \times n^1 + c \times n^0 = an^2 + bn + c$$

Avec a, b, c des chiffres strictement inférieur à n.
En base n, il ne peut y avoir que n chiffres

Exemple : En base 2, il n'y a que 2 chiffres : 0 et 1

$$\begin{aligned}\overline{110111}^{\,2} &= 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 32 + 16 + 0 + 4 + 2 + 1 = 55\end{aligned}$$

En base 5, il y a 5 chiffres : 0, 1, 2, 3 et 4

$$\begin{aligned}\overline{231}^{\,5} &= 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 1 \times 5^0 \\ &= 2 \times 25 + 3 \times 5 + 1 = 50 + 15 + 1 = 66\end{aligned}$$

En base 12, il y a douze chiffres. Comme nous n'avons que 10 chiffres dans notre système décimal, on prend souvent pour les deux derniers chiffres α pour le chiffre 10 et β pour le chiffre 11.
Les douze chiffres sont donc : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α et β.

$$\begin{aligned}\overline{1\alpha 6}^{\,12} &= 1 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 6 \times 12^0 \\ &= 144 + 120 + 6 = 270\end{aligned}$$

3.2 Traduire un nombre dans un système en base n

Règle 1 : Pour déterminer l'écriture d'un nombre dans notre système de numération dans un système en base n, on effectue des divisions successives de ce nombre par n. On obtient le nombre en base n, on prenant le dernier quotient et en remontant tous les restes de ces divisions.

Exemple :

- Déterminer 23 en base 2

$$\begin{array}{r|l} 23 & 2 \\ \cline{2-2} 03 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 2 \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 1 \end{array} \qquad 23 = \overline{10111}^{\,2}$$

- Déterminer 52 en base 5

$$\begin{array}{r|l} 52 & 5 \\ \cline{2-2} 2 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array} \qquad 52 = \overline{202}^{\,5}$$

- Déterminer 550 en base 12

$$\begin{array}{r|l} 550 & 12 \\ \cline{2-2} 70 & 45 \\ 10 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 12 \\ \cline{2-2} 9 & 3 \end{array} \qquad 550 = \overline{39\alpha}^{\,12}$$

le premier reste étant 10, on le transcrit en α.