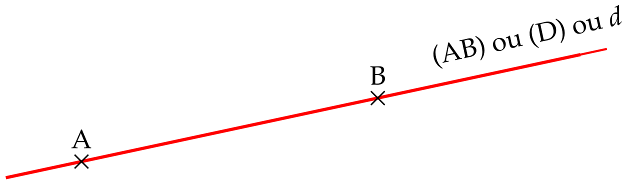
Constructions géométriques

Table des matières

1 Rappels et notations

- **Le point** : Constituant élémentaire du plan euclidien. Il se note avec une majuscule A, B, C . . . On note souvent un point inconnu par M, N, . . .
- **La droite** : Ligne qui passe par deux points par exemple A et B qui est illimitée à chaque extrémité.
  On note une droite (AB), (D), (Δ), d ou δ. On remarquera que si l'on utilise une majuscule celle-ci doit être entre parenthèses tandis que pour une minuscule cela n'est pas nécessaire.



Relations entre deux droites

1) Deux droites d_1 et d_2 sont parallèles si elles n'ont aucun point commun ou si elles sont confondues :

$$\begin{aligned} d_1 \,//\, d_2 \quad \Leftrightarrow \quad & d_1 \text{ et } d_2 \text{ n'ont aucun point commun ou} \\ & d_1 = d_2 \end{aligned}$$

2) Deux droites sont sécantes si elles ne sont pas parallèles. Elles se coupent alors en un point.

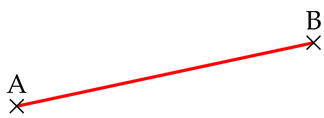
3) Si trois droites se coupent en un point, elles sont **concourantes**.

4) Deux droites peuvent être perpendiculaires si elles se coupent en angle droit. On note alors $d_1 \perp d_2$

   Si deux droites sont perpendiculaires à une troisièmes ces deux droites sont parallèles entre elles.

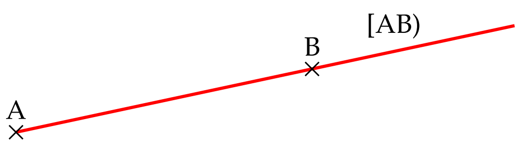
$$\left.\begin{array}{l} d_1 \perp d_3 \\ d_2 \perp d_3 \end{array}\right\} \quad \text{alors} \quad d_1 \,//\, d_2$$

- **Segment** : Portion d'une droite limitée par deux point A et B. Ce segment est alors noté [AB].

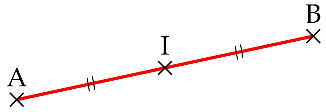


  Si le plan est muni d'une unité de mesure alors la longueur du segment [AB] est notée : AB.
  La longueur AB est nombre positif ou nul, on a : AB = BA.

- **Demi-droite** : Portion d'une droite limitée à une extrémité. Si la demi-droite est limitée par le point A, la demi-droite se note : [AB).



- **Milieu d'un segment** : le milieu d'un segment [AB] est le point I à égale distance de A et de B. On le note I $= m$[AB].



$$\text{AI} = \text{IB} = \frac{\text{AB}}{2}$$

2 Construction dans le plan

Pour la réalisation d'une figure plusieurs cas peuvent se présenter :
- Uniquement à la règle non graduée et au compas.
- Règle non graduée, compas et équerre.
- Règle graduée, compas et équerre.

Les exercices de construction permettent de mettre en évidence les propriétés des figures élémentaires : médiatrice, bissectrice, triangle, parallélogramme . . .
La règle non graduée permet de tracer des droites et le compas de reporter des distances.
Pour écrire un programme de construction, on fera la liste des étapes nécessaires et suffisantes pour tracer une figure sans ambiguïté.
On s'intéressera dans ce chapitre à l'exécution d'une figure à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas. Le fait d'avoir une équerre ou une règle graduée permet seulement d'aller plus vite dans la réalisation de la figure. Il est important de bien lire l'énoncé afin de savoir quels sont les instruments de construction permis.

3 Figures de bases pour la construction

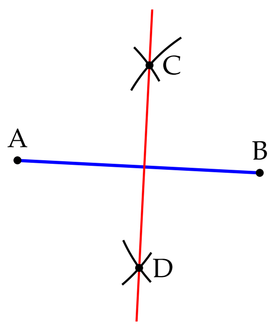
3.1 La médiatrice d'un segment

Définition 1 : La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite dont les points sont équidistants des points A et B. Sa construction ne nécessite qu'un compas et une règle non graduée (Voir ci-dessous)

Propriété : La médiatrice du segment [AB] passe par le milieu de [AB] perpendiculairement.

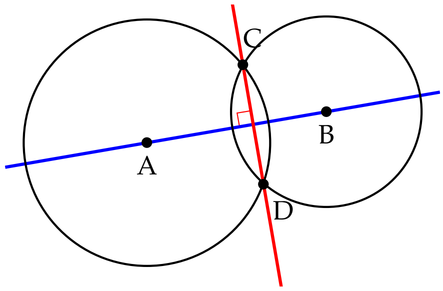
Intérêt : Permet de déterminer le milieu d'un segment sans utiliser une règle graduée ou de tracer une perpendiculaire à une droite donnée sans utiliser une équerre.

Pour déterminer les points C et D, on reporte une même distance à partir de A et B.



Exemple : Tracer la perpendiculaire à la droite (AB) passant par un point C extérieur à cette droite.

On reporte la distance AC et la distance BC à partir respectivement de A et B. On obtient ainsi un point *D*. Comme A et B sont équidistants de C et D, la droite (AB) est la médiatrice de [CD] donc (AB) $\perp$ (CD)



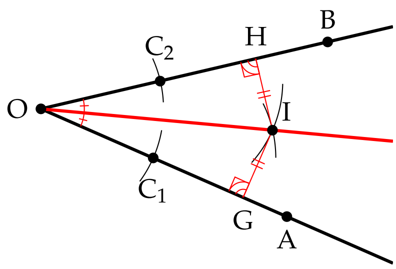
3.2 Bissectrice d'un angle

Définition 2 : La bissectrice d'une angle $\widehat{AOB}$ est la droite qui sépare cet angle en deux angles égaux.

Propriété : Les points de la bissectrice sont équidistants des deux demi-droites qui compose cet angle. Cette propriété permet de tracer la bissectrice d'un angle à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas, comme l'indique la construction ci-dessous.

Intérêt : La construction de la bissectrice permet entre autre de tracer des angles de 30° et de 45° à partir respectivement d'un angle droit et d'un angle de 60°. (triangle équilatéral)

Pour déterminer le point I de la bissectrice de $\widehat{AOB}$, on reporte à partir de O une même distance. On obtient ainsi les points C_1 et C_2. A partir de ces deux points, on reporte une même distance pour obtenir le point I.



3.3 Le parallélogramme

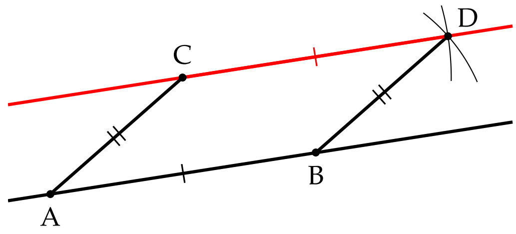
On s'intéresse ici à deux définitions du parallélogramme pour la construction de figure. On verra d'autres définitions possibles dans le chapitre sur les quadrilatères.

Définition 3 : Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux de même longueur. Un parallélogramme est aussi un quadrilatère dont les côtés opposés sont deux à deux parallèles.

Intérêt : Le parallélogramme permet donc de tracer des droites parallèles à l'aide de la première définition

Exemple : Tracer la parallèle à une droite (AB) donnée passant par un point extérieur C à cette droite.

Tracer cette droite revient à tracer le point D tel que ABDC soit un parallélogramme. On reporte donc la distance AC à partir de B et la distance AB à partir de C. On obtient ainsi le point D. La droite cherchée est la droite (CD).



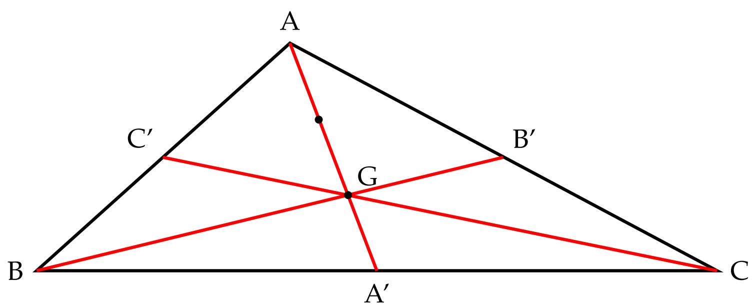
4 Droites remarquables dans un triangle

4.1 Les médianes

Définition 4 : Une médiane d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et par le milieu du côté opposé.

Propriété : Les trois médianes sont concourantes en un point G appelé le **centre de gravité**. Il est situé au deux tiers du sommet ou à un tiers de la base.

Intérêt : Permet la division d'un segment en trois partie égales



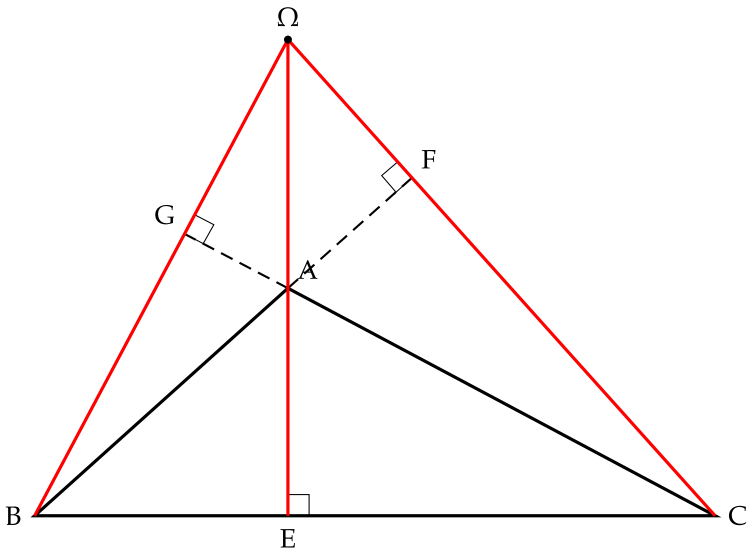
Remarque : On peut effectuer cette figure à la règle et au compas en déterminant les milieux A′, B′ et C′ des côtés du triangle en traçant les médiatrices respectives de [BC], [AC] et [AB].

$$AG = \frac{2}{3}AA' \qquad A'G = \frac{1}{3}AA'$$

4.2 Les hauteurs

Définition 5 : Une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.

Propriété : Les trois hauteurs sont concourantes en un point Ω appelé **orthocentre**.



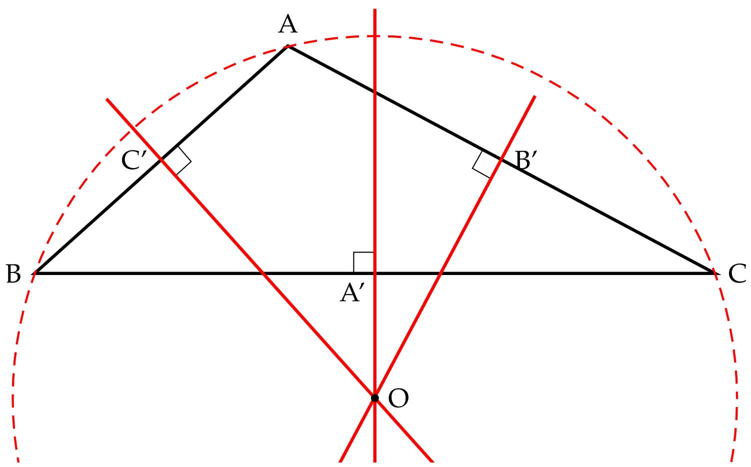
Remarque : On peut effectuer cette figure à la règle et au compas en traçant les perpendiculaires en utilisant la construction de la médiatrice.
Contrairement au centre de gravité, l'orthocentre peut être à l'extérieur du triangle comme on peut le remarquer sur la figure ci-dessus. Il est à noter que pour tracer certaines hauteurs, il est nécessaire de prolonger les côté du triangle. Cela se produit lorsque l'angle au sommet est supérieur à 90°.

4.3 Les médiatrices

Définition 6 : La médiatrice d'un segment [AB] est la droite dont les points sont équidistants des points A et B. Elle coupe alors ce segment en son milieu perpendiculairement.

Propriété : Les trois médiatrices d'un triangle sont concourante en un point O appelé le **centre du cercle circonscrit**.

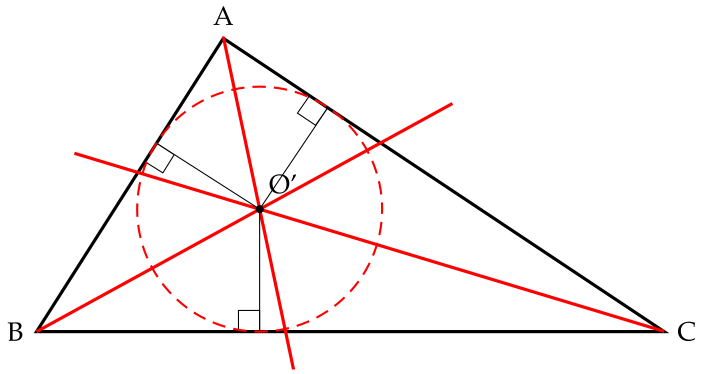
Intérêt : Permet de retrouver le centre d'un cercle en prenant trois points sur celui-ci.



4.4 Les bissectrices

Définition 7 : La bissectrice d'un angle divise celui-ci en deux parties égales.

Propriété : Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point O′ appelé **centre du cercle inscrit**.



4.5 La droite d'Euler

On peut montrer que le centre de gravité G, l'orthocentre Ω et le centre du cercle circonscrit O sont alignés. Cette droite s'appelle la droite d'Euler (mathématicien suisse du 18[e] siècle)