Triangles particuliers. Théorème de Pythagore

Table des matières

1 Rappel sur les racines carrées

1.1 Définition

Définition 1 : On appelle racines carrée d'un nombre réel a positif ou nul, le nombre réel positif ou nul tel que :

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

Exemples : Tous les carrés ont des racines carrées entières, comme :

$$\sqrt{4} = 2 \quad , \quad \sqrt{81} = 9$$

Cependant, la plupart des racines carrée sont des irrationnels et ne peuvent s'écrire alors que sous forme de radical($\sqrt{}$). Lorsque l'énoncé le demandera, on pourra alors donner une valeur approchée.

$$\sqrt{3} \simeq 1,732$$

1.2 Propriétés

Règle 1 : La racine carrée du produit est égale au produit des racines carrées.

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

Exemple : Cette propriété permet de simplifier certaines racines carrées qui peuvent se décomposer en un produit dont un des facteurs est un carré. On a par exemple $12 = 4 \times 3$ donc :

$$\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

⚠ la racine carrée de la somme n'est pas égale à la somme des racines carrées.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Par exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \quad$ mais $\quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

Règle 2 : Pour effectuer le produit de deux nombres irrationnels, on peut utiliser la distributivité :

$$\begin{aligned}(\sqrt{6}+2)(\sqrt{3}-\sqrt{2}) &= \sqrt{18} - \sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

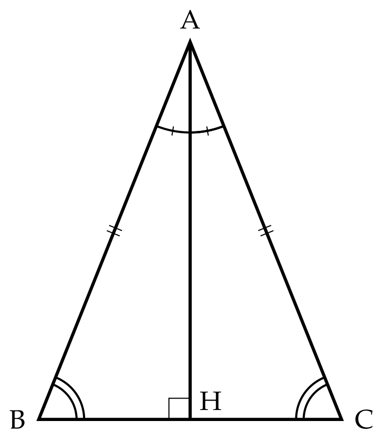
Règle 3 : Dans une fraction pour rendre rationnel le dénominateur qui est une racine carrée, on multiplie en haut et en bas par cette racine carrée.

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

2 Triangles particuliers

2.1 Le triangle isocèle

Définition 2 : Un triangle ABC est isocèle en A si et seulement si : $AB = AC$.

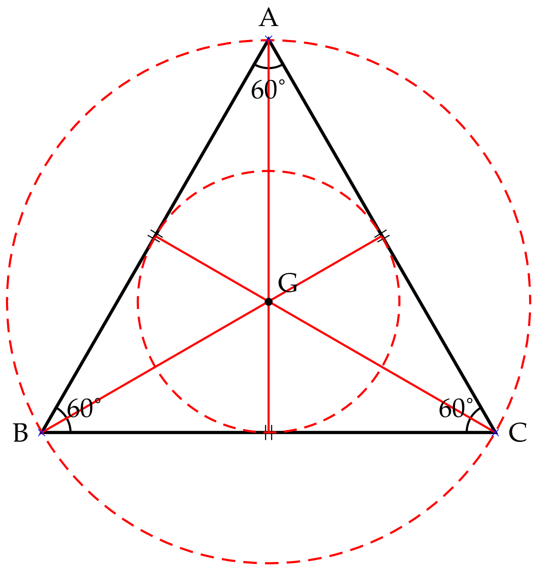


Propriété 1 : Dans un triangle ABC isocèle en A :

- la médiane et la hauteur issues de A, la médiatrice de [BC] et la bissectrice de $\widehat{A}$ sont confondues. La hauteur issue de A coupe donc [BC] en son milieu.
- $\widehat{B} = \widehat{C}$
- (AH) est un axe de symétrie du triangle ABC.

2.2 Le triangle équilatéral

Définition 3 : Un triangle est équilatéral si et seulement si ses trois côtés sont de même longueur.



Propriété 2 : Dans un triangle équilatéral de côté a :

- les trois médianes, les trois hauteurs, les trois médiatrices et les trois bissectrices sont confondues. Les quatre centres du triangle sont donc confondus.
- les angles du triangles sont égaux à 60°
- les trois médianes ou médiatrices ou hauteurs ou bissectrices sont axes de symétrie du triangle ABC.
- la longueur d'une hauteur est égal à : $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

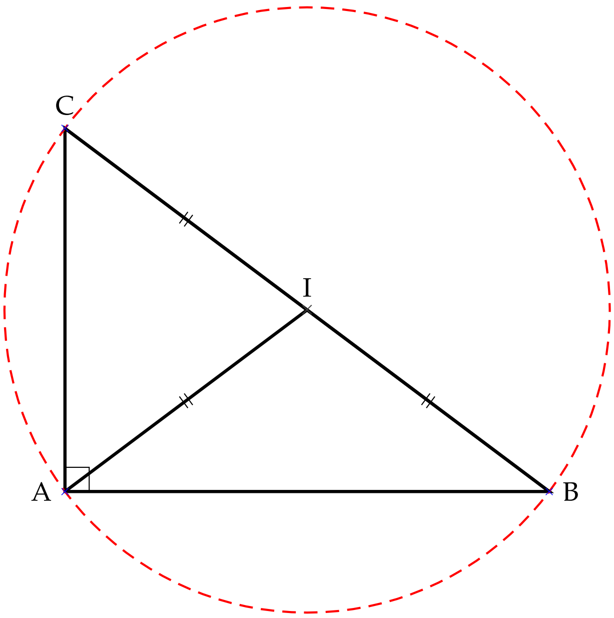
Remarque : Pour démontrer la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral penser au théorème de Pythagore.

2.3 Le triangle rectangle

Définition 4 : Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si :

$$(AB) \perp (AC)$$

Le côté opposé à l'angle droit (BC) est appelé hypoténuse



Propriété 3 : Dans un triangle rectangle en A :

- l'orthocentre est en A
- le centre du cercle circonscrit se situe au milieu de l'hypoténuse.
- $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont complémentaires : $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$

Théorème 1 : Théorème de Pythagore

Dans un triangle ABC rectangle en A, le carré de l'hypoténuse est égale à la somme des carrés des deux autres côtés : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Théorème 2 : Réciproque du théorème de Pythagore :

Dans un triangle ABC si l'on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle en A