Lecture graphique. Les fonctions affines

Table des matières

1 Définition et représentation d'une fonction

1.1 Définition

Définition 1 : Une fonction est une relation entre deux quantités x et y. Au nombre x on associe un unique nombre y noté $f(x)$.

Exemple :

- $f(x) = 2x + 3$ fonction affine représentée par une droite.

  $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 5 \text{ est } \textbf{l'image} \text{ de } 1 \\ 1 \text{ est un } \textbf{antécédent de 5}. \end{cases}$

  $f(3) = 2 \times 3 + 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 9 \text{ est } \textbf{l'image} \text{ de } 3 \\ 3 \text{ est un } \textbf{antécédent de 9}. \end{cases}$

- $f(x) = 5x^2$ fonction du second degré représentée par une parabole.

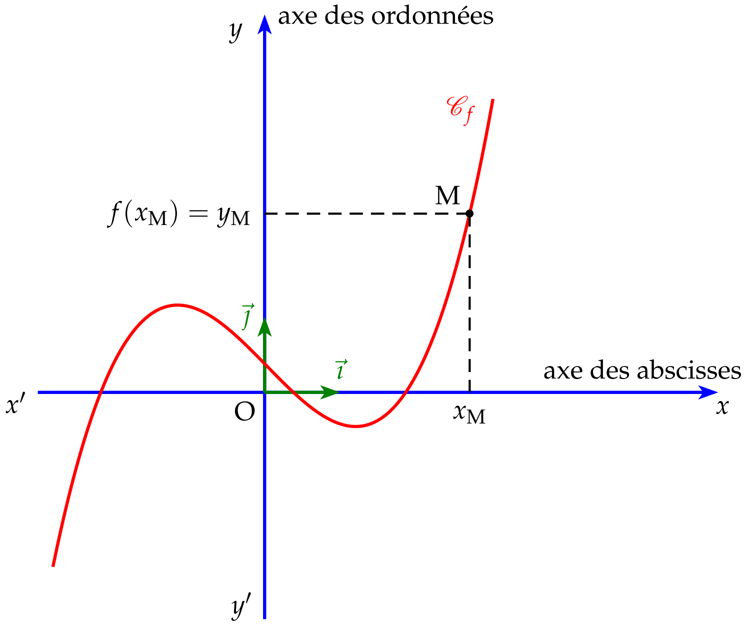
  $f(3) = 5 \times 3^2 = 45$

- $f(x) = \dfrac{24}{x}$ fonction inverse représentée par une hyperbole.

  $f(6) = \dfrac{24}{6} = 4$

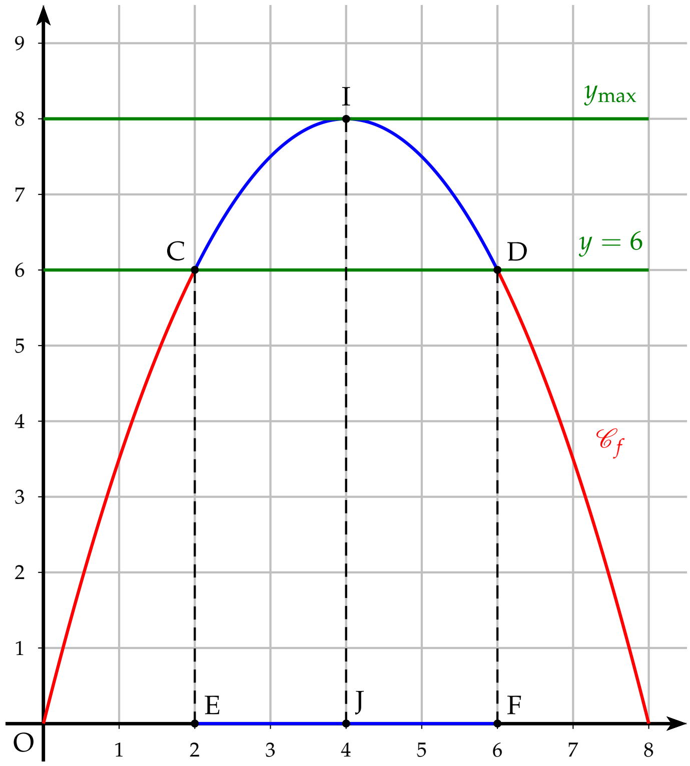
1.2 Représentation d'une fonction

On représente une fonction en associant la quantité x à l'abscisse et y à l'ordonnée d'un point. On fait varier x dans l'intervalle souhaitée et l'on obtient la courbe représentative de la fonction. La quantité x est alors appelée variable.
Pour x_M et $y_M = f(x_M)$ on associe alors un point $M(x_M, y_M)$.



1.3 Résolution graphique

La représentation graphique d'une fonction permet de résoudre des équations et des inéquations.
Soit la représentation suivante :



1) Déterminer x qui rend la fonction f maximum.

2) Déterminer les solutions de $f(x) = 6$.

3) Déterminer les solutions de $f(x) \geqslant 6$.

1) On trace la droite horizontale correspondant à l'ordonnée la plus grande $y_{\max}$. Elle coupe la courbe au point I. On reporte le point I sur l'axe des abscisses, on trouve alors le point J qui correspond à $x = 4$. Le maximum de la fonction est obtenu pour $x = 4$.

2) On trace la droite horizontale $y = 6$. Elle coupe la courbe en deux points C et D. On reporte ces deux points sur l'axe des abscisses : on obtient alors les points E et F qui correspondent respectivement à $x = 2$ et $x = 6$. L'équation $f(x) = 6$ admet deux solutions $x = 2$ et $x = 6$.

3) On cherche la partie de la courbe dont les ordonnées sont supérieures ou égales à 6. Elles se trouvent entre les droites $y_{\max}$ et $y = 6$. Les abscisses correspondantes se situent donc entre $x = 2$ et $x = 6$. On a donc $f(x) \geqslant 6$ si x se situe entre 2 et 6 compris.

2 Les fonctions affines

2.1 Définition

Définition 2 : Une fonction affine f est définie par : $f(x) = ax + b$.

Le coefficient a s'appelle le **coefficient directeur** car il détermine la pente de la droite.
Le coefficient b s'appelle l'**ordonnée à l'origine** car la droite coupe l'axe des ordonnées pour $y = b$.

Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ f est alors une fonction linéaire.

Si $a = 0$ alors $f(x) = b$ f est alors une fonction constante.

2.2 Représentation d'une fonction affine

Le représentation d'une fonction affine est une droite. Il suffit pour la tracer de déterminer deux points quelconque sur cette droite. Cela revient donc à déterminer deux images.
Si la fonction est une fonction linéaire, la représentation de la fonction passe par l'origine. Un seul point est alors nécessaire. Cela revient donc à déterminer qu'une seule image.
Si la fonction est constante, la droite est alors horizontale.

Exemples : Tracer les trois fonctions suivantes :

1) $f(x) = x + 2$

2) $g(x) = 0,5x$

3) $h(x) = 3$

1) La première fonction est une fonction affine quelconque. Il faut donc déterminer 2 images, par exemple :

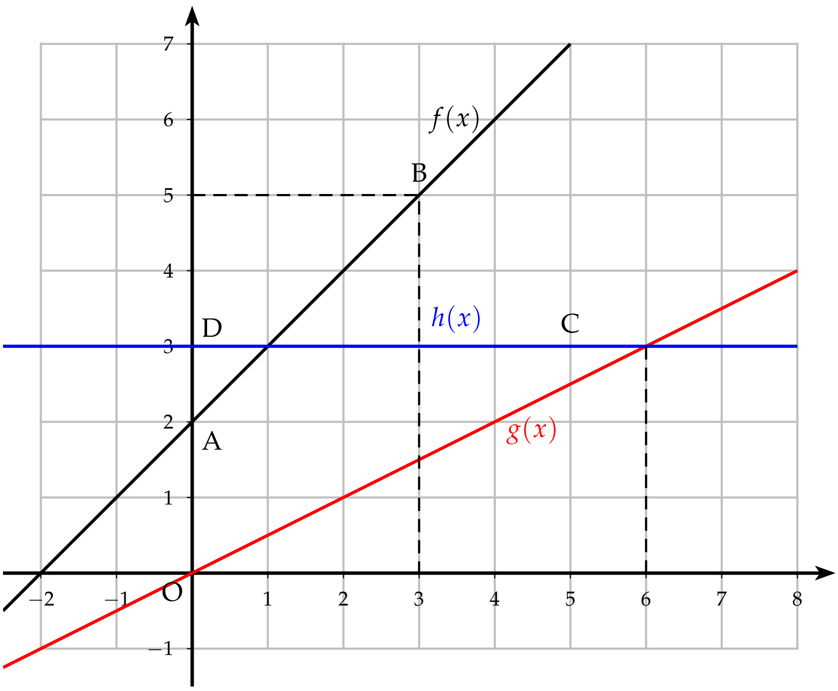
$$f(0) = 2 \text{ et } f(3) = 3+2 = 5 \quad \text{on obtient donc deux points } \mathrm{A}(0\,;\,1) \text{ et } \mathrm{B}(3\,;\,5)$$

2) La deuxième fonction est une fonction linéaire. Sa représentation passe donc par l'origine. Il suffit de déterminer une seule image, par exemple :

$$g(6) = 0,5 \times 6 = 3 \quad \text{on obtient donc le point } \mathrm{C}(6\,;\,3)$$

3) La troisième fonction est une fonction constante. Sa représentation est donc une droite horizontale. On peut prendre par exemple le point D$(0\,;\,3)$.

On obtient donc les représentations suivantes :



2.3 Fonction affine par morceaux

Définition 3 : Une fonction affine peut être définie par intervalles. On parle alors de fonction affine définie **par morceaux**.

Exemple : Dans une station balnéaire une société de location de voitures propose aux touristes le tarif suivant :
- un forfait de 66 €, les 70 premiers kilomètres gratuit.
- 0,30 € par kilomètre parcouru au-delà de 70 km.

Déterminer le prix de la location $P(x)$ pour x kilomètres parcourus puis représenter cette fonction entre 0 et 180 km.

Nous devons envisager deux cas.
- Le client effectue au maximum 70 km. Le prix de la location est alors une fonction constante car son prix ne dépend pas du nombre de km. On donc :

$$P(x) = 66$$

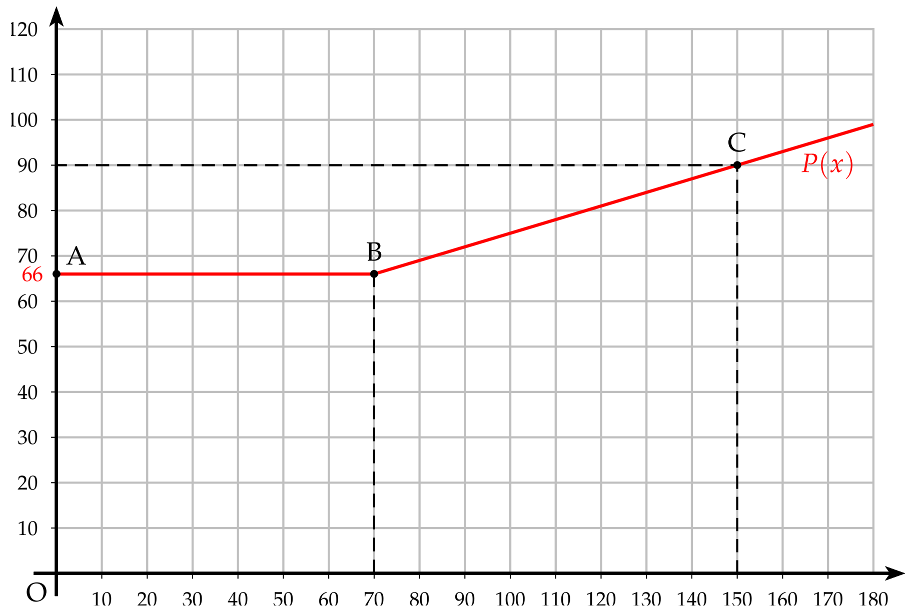
- Le client effectue plus de 70 km. Le prix de la location est alors une fonction affine. Le prix se décompose entre une partie fixe (66 €) et une partie proportionnelle au nombre de km dépassant 70. Soit :

$$P(x) = 66 + 0,30(x - 70) = 0,30x + 66 - 21 = 0,30x + 45$$

Conclusion : $\begin{cases} P(x) = 66 & \text{si } x \leqslant 70 \\ P(x) = 0,30x + 45 & \text{si } x > 70 \end{cases}.$

Représentons cette fonction.

- Pour $x \leqslant 70$, la représentation donne un segment horizontal délimité par les point A$(0\,;\,66)$ et B$(70\,;\,66)$.
- Pour $x > 70$, la représentation donne une demi-droite délimité par le point B$(70\,;\,66)$. Il suffit de déterminer une image pour tracer cette demi-droite.
  Par exemple $P(150) = 0,30 \times 150 + 45 = 45 + 45 = 90$ qui donne le point C$(150\,;\,90)$.



2.4 Applications

2.4.1 Optimisation

Dans une station balnéaire, trois sociétés de location de voitures proposent aux touristes les tarifs suivants :

- Société S_1 : un forfait de 23 € et 0,40 € par kilomètre parcouru.
- Société S_2 : un forfait de 66 €, les 70 premiers kilomètres gratuit et 0,30 € par kilomètre parcouru au-delà de 70 km.
- Société S_3 : 0,60 € par kilomètre parcouru.

1) Pour une personne qui aura parcouru x kilomètres, déterminer $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ correspondant aux prix qu'elle devra acquitter respectivement pour les sociétés S_1, S_2 et S_3.
2) Dans un repère orthogonal construire les représentations des fonctions f_1, f_2 et f_3, en prenant comme unité sur les abscisses 1 cm pour 25 km et sur les ordonnées 1 cm pour 10 €.
3) Déterminer graphiquement, puis par le calcul, le tarif le plus avantageux selon le nombre de kilomètres parcourus.

1) Les fonctions f_1 et f_3 se détermine aisément. On remarquera que la deuxième fonction correspond à la fonction traitée au paragraphe précédent. On a donc :
   - $f_1(x) = 0,40x + 23$

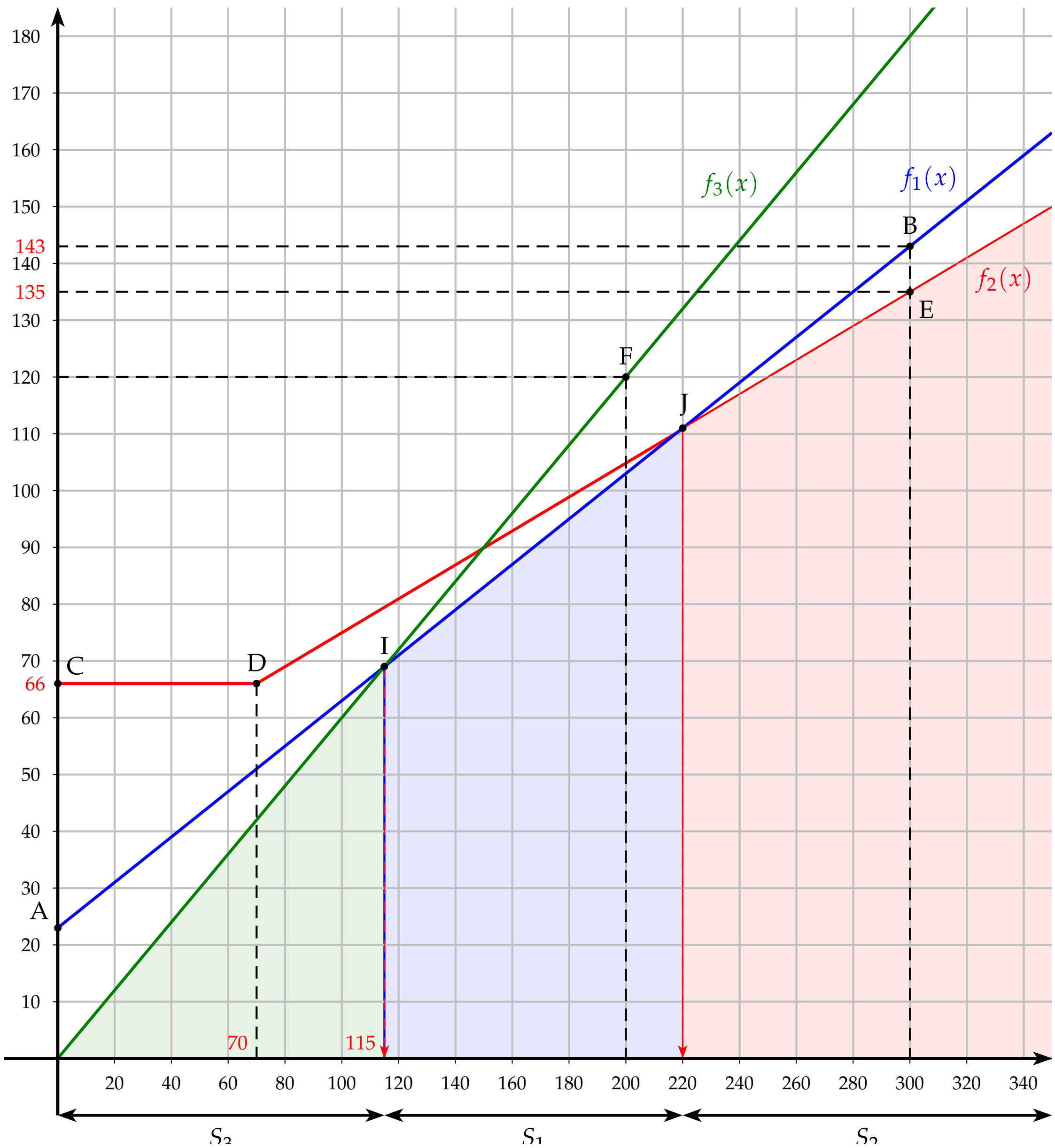
- $\begin{cases} f_2(x) = 66 & \text{pour } x \leqslant 70 \\ f_2(x) = 0,30x + 45 & \text{pour } x > 70 \end{cases}$.
- $f_3(x) = 0,60x$

2) La fonction f_1 est une fonction affine, il faut donc déterminer deux images pour tracer sa représentation, par exemple :
$f_1(0) = 23$ et $f_1(300) = 0,40 \times 300 + 23 = 143$,
on obtient donc les deux points $A(0\,;\,23)$ et $B(300\,;\,143)$.

Pour la fonction f_2, on détermine trois images, par exemple :
$f_2(0) = 66$ $f_2(70) = 66$ et $f_2(300) = 0,30 \times 300 + 45 = 135$,
on obtient donc les trois points C(0 ; 66) D(70 ; 66) et E(300 ; 135)

La fonction f_3 est une fonction linéaire donc une seule image suffit. Par exemple :
$f_3(200) = 0,60 \times 200 = 120$,
on obtient alors le point F(200 ; 120).

On obtient alors la représentation suivante :



3) Graphiquement, pour déterminer le tarif le plus avantageux, il faut sélectionner la représentation qui se trouve en-dessous des deux autres.
   On lit 115 et 220 pour les abscisses respectives des points I et J.

   On obtient donc les trois choix suivants :

   a) Pour un trajet de moins de 150 km, la société S_3 est plus avantageuse.
   b) Pour un trajet compris entre 150 et 220 km la société S_1 est plus avantageuse.
   c) Pour un trajet de plus de 220 km la société S_2 est plus avantageuse.

   Pour retrouver les abscisses des point I et J par le calcul, il suffit de résoudre les équations suivantes :

   a) Pour I

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x) \\ 0,60x &= 0,40x + 23 \\ 0,60x - 0,40x &= 23 \\ 0,2x &= 23 \\ x &= \frac{23}{0,2} = 115 \end{aligned}$$

   On retrouve bien le résultat graphique.

   b) Pour J

$$\begin{aligned} f_1(x) &= f_2(x) \\ 0,40x + 23 &= 0,30x + 45 \\ 0,40x - 0,30x &= 45 - 23 \\ 0,1x &= 22 \\ x &= \frac{22}{0,1} = 220 \end{aligned}$$

   On retrouve bien le résultat graphique.

2.4.2 Résolution de système

Résolvons graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y = 30 \\ 3x + 2y = 55 \end{cases}$$

Pour cela, on isole y dans les deux équations, on obtient alors :

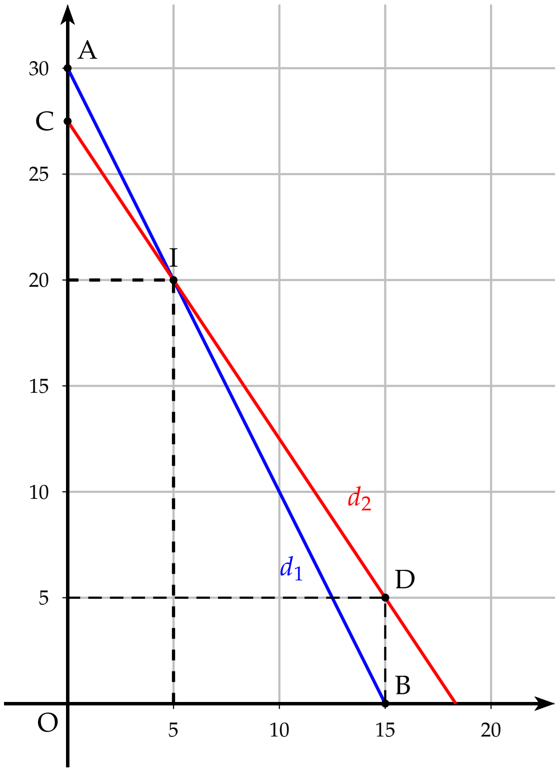
$$\begin{cases} y = -2x + 30 & d_1 \\ y = \dfrac{-3x + 55}{2} & d_2 \end{cases}$$

On obtient alors deux équations de droite d_1 et d_2. On détermine deux point pour chacune des droites.

a) Pour d_1, on prend par exemple :
   Pour $x = 0$, on obtient $y = 30$, soit le point A(0 ; 30).
   Pour $x = 15$, on obtient $y = -2 \times 15 + 30 = 0$, soit le point B(15 ; 0)

b) Pour la droite d_2, on prend par exemple :
   Pour $x = 0$, on obtient $y = \dfrac{55}{2} = 27,5$, soit le point C(0 ; 27,5).
   Pour $x = 15$, on obtient $y = \dfrac{-3 \times 15 + 55}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$, soit le point D(15 ; 5).

On obtient alors la représentation suivante :



On obtient alors la solution du système par les coordonnées du point I d'intersection des deux droites.

$$x = 5 \qquad \text{et} \qquad y = 20$$