# La proportionnalité

## Table des matières

# 1 Définition - exemples - propriétés

## 1.1 Définition

**Définition 1 :** On dit que deux quantités $x$ et $y$ sont proportionnelles si et seulement si pour deux valeurs quelconques de ces quantités $x_1$ et $x_2$ d'une part et $y_1$ et $y_2$ d'autre part on a :

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_2} = k$$

$k$ est appelé **coefficient de proportionnalité** ou **coefficient multiplicateur** car on a :

$$y_1 = kx_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = kx_2$$

**Exemples :**

Les exemples sont très nombreux, par exemple :

- En physique :
  La distance parcourue est proportionnelle au temps à vitesse constante : $d = v\,t$
  La tension électrique est proportionnelle à l'intensité (loi d'Ohm) : $U = RI$
  Le poids d'un objet est proportionnel à sa masse : $P = mg$
- Autres exemples :
  En copropriété, les charges à payer sont proportionnelles à la surface de l'habitation.
  Pour des légumes, le prix est proportionnel au poids.
  Dans une élection, le pourcentage obtenu par chaque parti est proportionnel aux nombres de suffrages exprimés.

## 1.2 Propriétés

La proportionnalité peut être associée à une fonction linéaire : $y = f(x) = ax$
Le coefficient directeur $a$ correspond au coefficient de proportionnalité $k$.

**Propriété 1 :** : **Propriété additive**

Soit deux quantités proportionnelles $x$ et $y$ si $x_1$ et $x_2$ sont en relation respectivement avec $y_1$ et $y_2$ alors $x_1 + x_2$ est en relation avec $y_1 + y_2$.
Ce qui se traduit avec une fonction linéaire : $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

**Exemple :**

$$\begin{array}{cccc} \text{Si} & 2 & \longmapsto & 5 \\ \text{et} & 3{,}2 & \longmapsto & 8 \\ \text{alors} & 2+3{,}2 & \longmapsto & 5+8 \end{array}$$

**Propriété 2 :** : **Propriété multiplicative**

Soit deux quantités proportionnelles $x$ et $y$ et $\lambda$ un coefficient si $x_1$ est en relation avec $y_1$ alors $\lambda x_1$ est en relation avec $\lambda y_1$.
Ce qui se traduit avec une fonction linéaire : $f(\lambda x_1) = \lambda f(x_2)$

**Exemple :**

$$\begin{array}{cccc} \text{Si} & 2 & \longmapsto & 5 \\ \text{Alors} & 6\times 2 & \longmapsto & 6\times 5 \end{array}$$

# 2 Différentes méthode de résolution

Une voiture consomme 22 litres pour 275 km, combien consomme-t-elle pour 200 km ?

Hypothèse : on suppose que la vitesse de la voiture est constante tout au long du trajet. La consommation est donc proportionnelle à la distance parcourue.

## 2.1 Retour à l'unité : règle de 3

$$\begin{array}{lllll} \text{Pour} & \mathbf{275}\text{ km} & \text{on consomme} & \mathbf{22}\text{ litres} & \text{donc} \\[2ex] \text{pour} & \mathbf{1}\text{ km} & \text{on consomme} & \dfrac{\mathbf{22}}{\mathbf{275}}\text{ litres} & \text{et donc} \\[2ex] \text{pour} & \mathbf{200}\text{ km} & \text{on consomme} & \dfrac{\mathbf{22}}{\mathbf{275}}\times\mathbf{200}=\mathbf{16}\text{ litres} & \end{array}$$

## 2.2 Retour à un diviseur commun

On cherche le diviseur commun entre 275 et 200.
On trouve 25 car : $275 = 11\times 25$ et $200 = 8\times 25$.
Donc, au lieu de revenir à l'unité, on revient au diviseur commun.

$$\begin{array}{lllll} \text{Pour} & \mathbf{275}\text{ km} & \text{on consomme} & \mathbf{22}\text{ litres} & \text{donc} \\[2ex] \text{pour} & \mathbf{25}\text{ km} & \text{on consomme} & \dfrac{\mathbf{22}}{\mathbf{11}}=\mathbf{2}\text{ litres} & \text{et donc} \\[2ex] \text{pour} & \mathbf{25}\times\mathbf{8}\text{ km} & \text{on consomme} & \mathbf{2}\times\mathbf{8}=\mathbf{16}\text{ litres} & \end{array}$$

## 2.3 Tableau de proportionnalité

Le tableau de proportionnalité est basé sur le **produit en croix**.

**Propriété 3 :** : **Produit en croix**

$$\text{Si on a : } \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{alors} \quad a\times d = b\times c$$

Dans notre exemple, si $x$ est la quantité cherché, on a donc : $\dfrac{275}{22}=\dfrac{200}{x}$

On peut alors représenter cette égalité par un tableau :

| | |
|---|---|
| 275 | 200 |
| 22 | $x$ |

On a alors : $x = \dfrac{200 \times 22}{275} = 16$

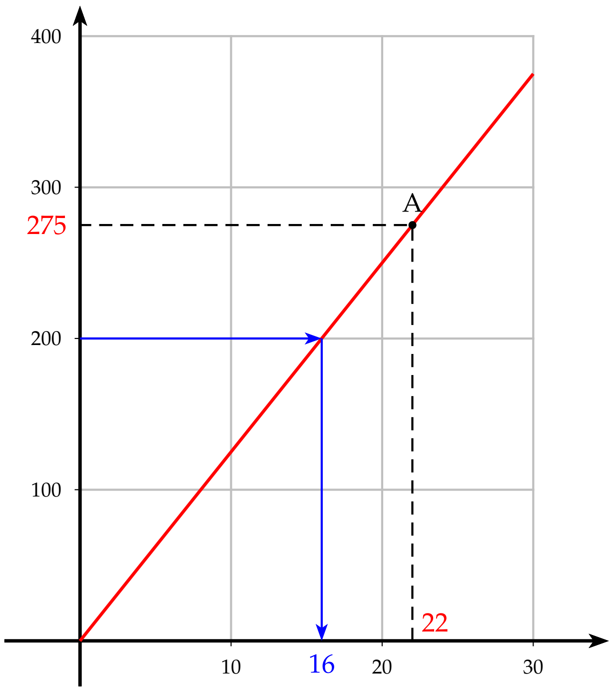
La quantité cherché est alors le produit de la diagonale complète par le nombre de la diagonale incomplète.

## 2.4 Résolution graphique

On trace la fonction $f$ qui au nombre de litres associe le nombre de km parcourus.

La fonction $f$ est linéaire donc un seul point permet de tracer cette fonction, comme $f(22) = 275$, la droite passe par le point A(22 ; 275).

On obtient donc :




## 2.5 Résolution analytique

Il s'agit de déterminer l'expression algébrique de la fonction $f$ qui au nombre de litres associe le nombre de km parcourus.

La fonction $f$ est linéaire car le nombre de km parcourus est proportionnel au nombre litres. La fonction $f$ est du type : $f(x) = ax$.

De l'information $f(22) = 275$, on en déduit : $a = \dfrac{275}{22} = 12,5$.

L'expression de la fonction $f$ est donc : $f(x) = 12,5x$.

On revient au problème, on cherche $x$ pour que :

$$f(x) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad 12,5x = 200 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{200}{12,5} = 16$$