Le théorème de Thalès

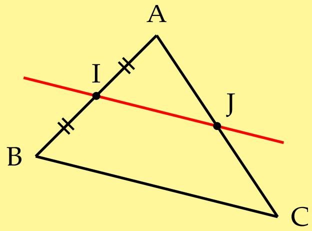
Table des matières

1 Théorème des milieux

1.1 Le théorème direct

Théorème 1 : Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.

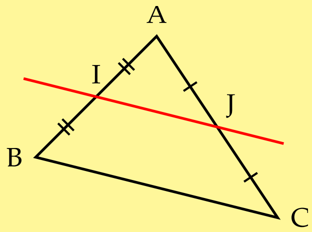
Si $\begin{cases} \text{I} = m[\text{AB}] \\ (\text{IJ}) \,/\!/\, (\text{BC}) \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{J} = m[\text{AC}] \\ \text{IJ} = \dfrac{1}{2}\text{BC} \end{cases}$



1.2 La réciproque du théorème des milieux

Théorème 2 : Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu de deux côtés est parallèle au troisième.

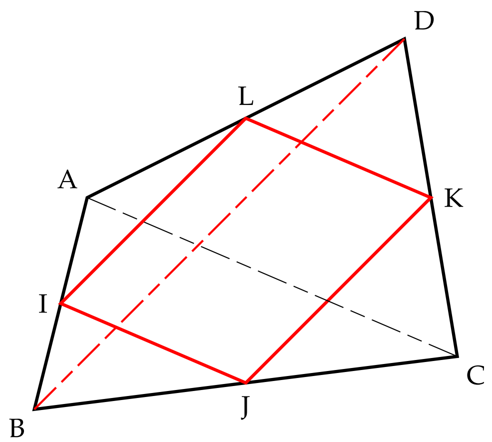
Si $\begin{cases} \text{I} = m[\text{AB}] \\ \text{J} = m[\text{AC}] \end{cases}$ alors $\begin{cases} (\text{IJ}) \,/\!/\, (\text{BC}) \\ \text{IJ} = \dfrac{1}{2}\text{BC} \end{cases}$



1.3 Application : quadrilatère de Varignon (1654 - 1722)

Soit ABCD est quadrilatère quelconque. Soit I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Quelle la nature du quadrilatère IJKL ?

Faisons une figure (ci-contre)



- Dans le triangle ABD, on sait que I est le milieu de [AB] et L le milieu de [AD], donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

$$(\text{IL}) \,/\!/\, (\text{BD}) \quad \text{et} \quad \text{IL} = \frac{1}{2}\text{BD} \quad (1)$$

- Dans le triangle BDC, on sait que J est le milieu de [BC] et K le milieu de [CD], donc d'après la réciproque du théorème des milieux, on a :

$$(\text{JK}) \,/\!/\, (\text{BD}) \quad \text{et} \quad \text{JK} = \frac{1}{2}\text{BD} \quad (2)$$

Des propriétés (1) et (2), on en déduit : $(\text{IL}) \,/\!/\, (\text{JK})$ et $\text{IL} = \text{JK}$

Donc le quadrilatère IJKL possède deux côtés parallèles de même longueur, donc IJKL est un parallélogramme.

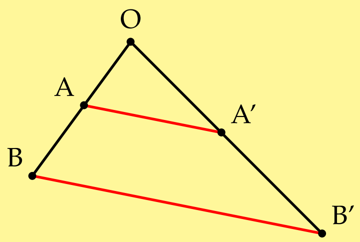
2 Le théorème de Thalès

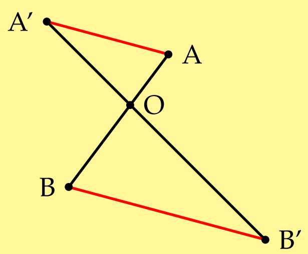
2.1 Théorème direct

Théorème 3 : : Soit deux droites (AB) et (A′B′) sécante en O.

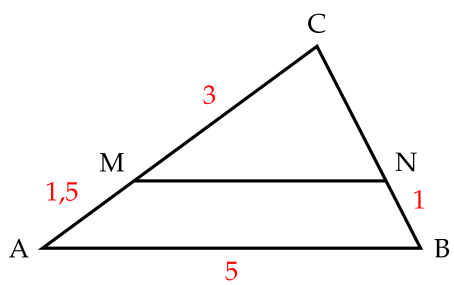
$$\text{Si} \quad (AA') \,/\!/\, (BB') \quad \text{alors, on a :} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'}$$

On peut avoir les deux configurations suivantes :





Exemple : Dans la figure ci-dessous, on a (MN) // (AB). À l'aide des indications portées sur la figure, calculer CN et MN.



Comme (MN) // (AB), nous avons une configuration de Thalès, donc

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Si on pose $x = CN$, de la première égalité, on a :

$$\frac{3}{4,5} = \frac{x}{x+1}$$

On fait un produit en croix,

$$\begin{aligned} 3(x+1) &= 4,5x \\ 3x+3 &= 4,5x \\ 3x - 4,5x &= -3 \\ -1,5x &= -3 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

De la seconde égalité, on a :

$$\frac{3}{4,5} = \frac{MN}{5}$$

On fait un produit en croix,

$$MN = \frac{3 \times 5}{4,5} = \frac{15}{4,5} = \frac{10}{3}$$

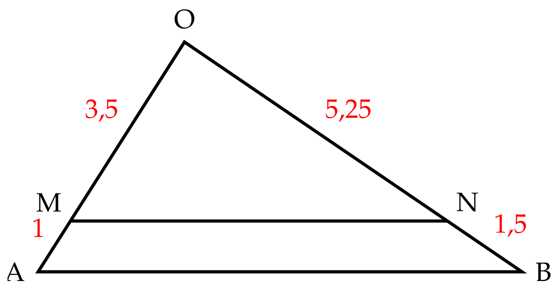
Conclusion : $CN = 2$ et $MN = \dfrac{10}{3}$.

2.2 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 4 : : Soit O, A, B d'une part et O, A', B' d'autre part alignés dans cet ordre.

$$\text{Si} \quad \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \quad \text{alors, on a :} \quad (AA') \,//\, (BB')$$

Exemple : On donne la figure ci-dessous, montrer que (AB) et (MN) sont parallèles.



Calculons les deux rapports :

$$\frac{OM}{OA} = \frac{3,5}{4,5} = \frac{7}{9}$$

$$\frac{ON}{OB} = \frac{5,25}{6,75} = \frac{21}{27} = \frac{7}{9}$$

On a donc : $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{ON}{OB}$

donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (AB) sont parallèles.