Les transformations du plan

Table des matières

1 Définition et propriétés

1.1 Transformation

Définition 1 : Une transformation du plan est une application du plan dans lui-même qui a un point M associe un unique point M′ tel que à tout point M′ il n'existe qu'un unique antécédent (application inversible).

$$\mathrm{M} \xrightarrow{T} \mathrm{M}' \qquad \text{avec} \qquad T(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$$

Les transformations que l'on étudie sont les transformations élémentaires :
translation, rotation, symétrie centrale, symétrie orthogonale et homothétie.

La projection orthogonale n'est pas une transformation car non réversible.

1.2 Isométrie

Définition 2 : Une isométrie est une transformation que conserve les distances. Soit i une isométrie, on a alors :

$$\begin{cases} \mathrm{A} \xrightarrow{i} \mathrm{A}' \\ \mathrm{B} \xrightarrow{i} \mathrm{B}' \end{cases} \quad \text{on a alors :} \quad \mathrm{A'B'} = \mathrm{AB}$$

Les isométries élémentaires sont : les translations, les rotations, les symétries centrales et orthogonales.

1.3 Propriétés des isométries

Propriété 1 : Soient trois points A, B, C et deux droites d et Δ et leurs images A′, B′, C′, d', Δ' par une isométrie.

Une isométrie conserve :

- Les distances : $\mathrm{A'B'} = \mathrm{AB}$
- Les aires : $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$
- Le parallélisme : si $d \,//\, \Delta$ alors $d' \,//\, \Delta'$
- L'orthogonalité : si $d \perp \Delta$ alors $d' \perp \Delta'$
- Les angles géométriques : $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{B'A'C'}}$
- Le milieu : si $\mathrm{I} = m[\mathrm{AB}]$ alors $\mathrm{I}' = m[\mathrm{A'B'}]$
- L'alignement : si A, B et C sont alignés alors A′, B′ et C′ le sont aussi.
- Le contact : si I est l'intersection des droites d et Δ alors I′ est l'intersection de d' et Δ'

Les images d'une droite et d'un cercle par une isométrie sont respectivement une droite et un cercle de même rayon.

Lorsque les angles orientés sont conservés, on parle de **déplacement**. C'est le cas pour les translations, les rotations et les symétries centrales.

Lorsque les angles orientés sont transformé en leurs opposés (figure retournée), on parle d'**antidéplacement**. C'est le cas des symétries orthogonales

2 La translation

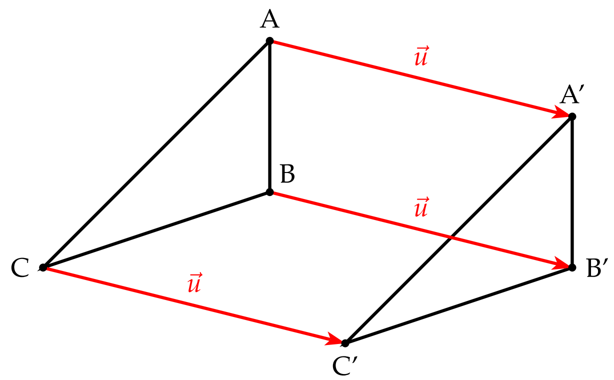
Définition 3 : Une translation t de vecteur $\overrightarrow{u}$ est une transformation définie par :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{t} \mathrm{M}' \quad \text{tel que} \quad \overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \overrightarrow{u}$$

Remarque :

- si A′ et B′ sont les images respectives des points A et B par une translation alors le quadrilatère AA′B′B est un parallélogramme.
- La translation n'a pas de point invariant.

2.1 Image d'un triangle



2.2 Image d'une droite

L'image d'une droite d est une droite d' telle que :

- $d' \mathbin{/\!/} d$ si la direction de d est différente de $\vec{u}$.
- $d' = d$ si d et $\vec{u}$ ont même direction.

3 La rotation

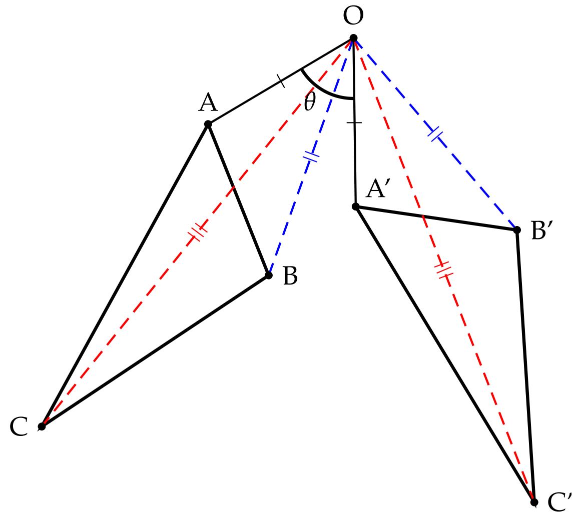
Définition 4 : Une rotation r de centre O et d'angle θ est une transformation définie par :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{r} \mathrm{M}' \quad \text{tel que} \quad \widehat{\mathrm{MOM}'} = \theta \quad \text{et} \quad \mathrm{OM}' = \mathrm{OM}$$

Remarque :

- La rotation possède un point invariant : son centre.
- Une rotation de 90 °correspond à un quart de tour.
- Une rotation de 180 °correspond à une symétrie centrale.

3.1 Image d'un triangle



3.2 Image d'une droite

L'image d'une droite d est une droite d' telle que : d' et d forme un angle θ.

4 Symétrie centrale

Définition 5 : Une symétrie s de centre O est une transformation définie par :

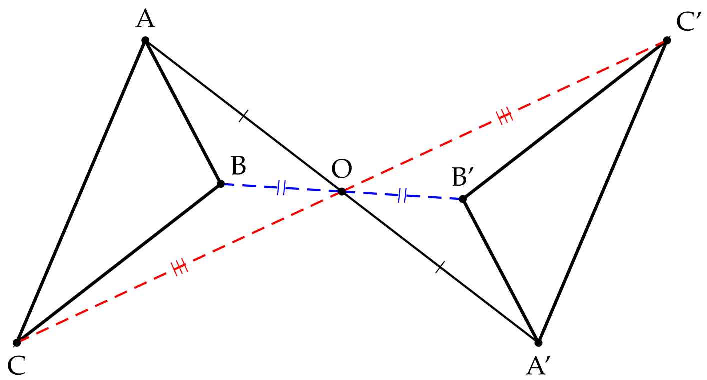
$$\mathrm{M} \xrightarrow{s} \mathrm{M}' \quad \text{tel que O est le milieu de [MM']}$$

La symétrie correspond à une rotation de 180°.

Remarque :

- si A′ et B′ sont les images respectives des points A et B par une symétrie centrale alors le quadrilatère ABA′B′ est un parallélogramme.
- La symétrie centrale a un point invariant : son centre.

4.1 Image d'un triangle



4.2 Image d'une droite

L'image d'une droite d est une droite d' telle que :

- $d' \mathbin{//} d$ si O n'est pas sur d
- $d' = d$ si O est sur d.

5 La symétrie orthogonale ou réflexion

Définition 6 : Une symétrie orthogonale S d'axe Δ est une transformation définie par :

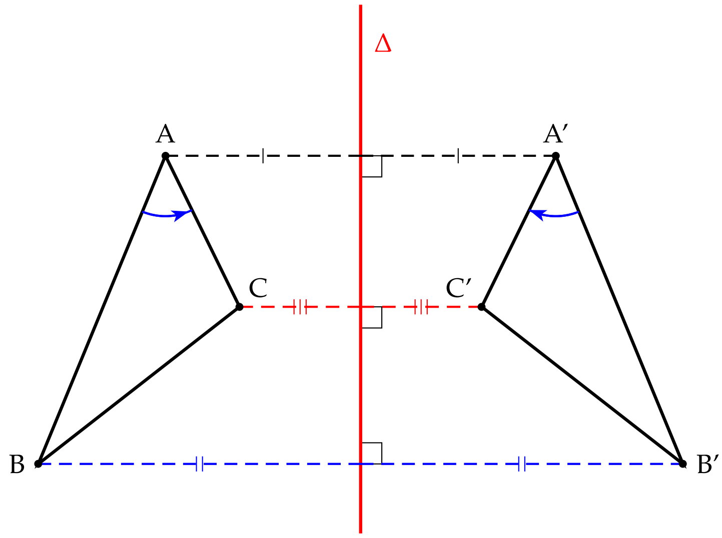
$$\mathrm{M} \xrightarrow{S} \mathrm{M}' \quad \text{tel que } \Delta \text{ est la médiatrice de } [\mathrm{MM}']$$

La symétrie orthogonale est encore appelé réflexion

Remarque :

- La symétrie orthogonale possède une droite où tous les points sont invariant : son axe.
- La symétrie orthogonale inverse les angles orientés.

5.1 Image d'un triangle



ABC est direct et A'B'C' indirect

5.2 Image d'une droite

L'image d'une droite d est une droite d' telle que :

- $d' = d$ si $d = \Delta$ ou si $d \perp \Delta$
- $d' \mathbin{//} d$ si $d \mathbin{//} \Delta$.
- Δ est la bissectrice de l'angle formé par les droite d et d' dans les autres cas.

6 L'homothétie

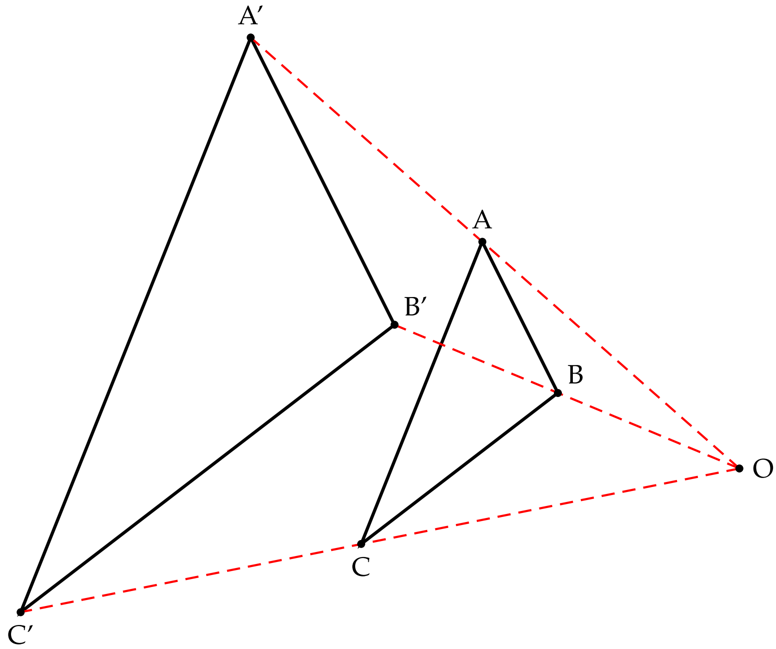
Définition 7 : Une homothétie h de centre O et de rapport k est une transformation définie par :

$$\mathrm{M} \xrightarrow{h} \mathrm{M}' \quad \text{tel que :} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Remarque :

- L'homothétie est une transformation qui agrandi les figures si $k > 1$ et qui les réduit si $k < 1$.
- Si A' et B' sont les images respectives des points A et B par une homothétie alors AA'B'B est un trapèze.
- L'homothétie n'est pas une isométrie. Elle ne conserve ni les distances ni les aires, mais conserve les autres propriétés des isométries.
- Une homothétie possède un point invariant : son centre.
- L'aire d'une figure par une homothétie est multipliée par k^2.

6.1 Image d'un triangle



6.2 Image d'une droite

L'image d'une droite d est une droite d' telle que :

- $d' = d$ si O est sur d.
- $d' \mathbin{//} d$ si O n'est pas sur d.

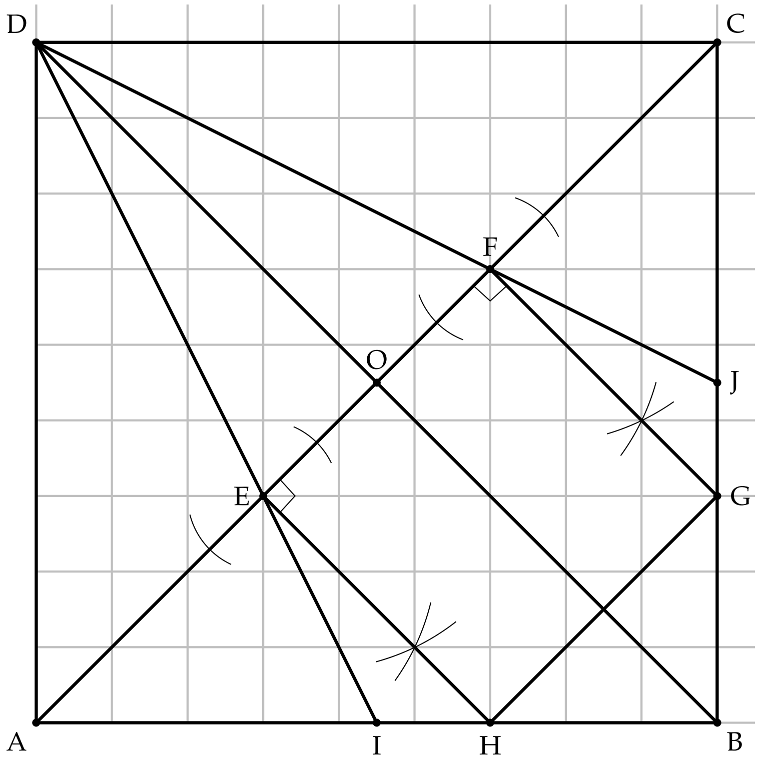
7 Exercice

Soit ABCD un carré de centre O et de côté 9 cm.
On note I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [BC], puis E et F les points d'intersection de la droite (AC) avec respectivement les droites (DI) et (DJ). La perpendiculaire en E à la droite (AC) coupe (AB) en H ; la perpendiculaire en F à la droite (AC) coupe (BC) en G.
On considère alors le quadrilatère EFGH.

1) **Construction**

   Tracer le carré ABCD et les points I et J en vous aidant du quadrillage de la copie (un carreau de la copie correspond à une longueur de 5 mm).

   Compléter la figure par une construction à la règle et au compas. On laissera apparents les traits de construction.



2) **L'objectif de cette question est de prouver que EFGH est un carré.**

a) Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABD.

En déduire la valeur du rapport $\dfrac{AE}{AO}$ puis prouver que $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{3}$.

Dans le triangle ABD :
E est sur (DI) et I milieu de [AB], donc E est sur la médiane issue de D.
O est le centre du carré ABCD, donc O est le milieu de [BD], comme E est sur [AO], donc E est sur la médiane issue de A.
E est donc l'intersection des médianes, donc E est le centre de gravité de ABD. On a alors :

$$\frac{AE}{AO} = \frac{2}{3}$$

Comme O est le milieu de [AC], on a :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE}{2AO} = \frac{1}{2}\frac{AE}{AO} = \frac{1}{3}$$

b) Montrer que $AE = 3\sqrt{2}$ cm.

On sait que la diagonale d'un carré de côté a est égale à $a\sqrt{2}$, on en déduit donc que $AC = 9\sqrt{2}$.

$$\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3} \quad \text{donc} \quad AE = \frac{1}{3}AC = 3\sqrt{2}$$

c) Quelle est la nature du triangle AEH ? Justifier la réponse.
En déduire que $EH = 3\sqrt{2}$ cm.

On sait que (EH) $\perp$ (AC), donc (AE) $\perp$ (EH). Le triangle AEH est donc rectangle en E.

Comme (AC) est la diagonale du carré ABCD, on a : $\widehat{EAH} = 45°$.

Un triangle rectangle qui possède un angle de 45°est isocèle. Le triangle AEH est donc rectangle isocèle en E.

$$AE = EH = 3\sqrt{2}$$

d) On rappelle qu'une diagonale d'un carré est un axe de symétrie de ce carré. Indiquer, sans justification, les symétriques respectifs des points E et H par rapport à l'axe (DB). En déduire les longueurs FG, FC puis la longueur EF.

Les symétriques des points E et H par la symétrie d'axe (DB) sont respectivement F et G.

La symétrie orthogonale conserve les distances donc :

$$EH = FG = 3\sqrt{2}$$

Les symétriques des points A et E par la symétrie d'axe (DB) sont respectivement C et F, donc :

$$AE = CF = 3\sqrt{2}$$

On en déduit donc :

$$EF = AC - AE - CF = 9\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

e) Conclure sur la nature du quadrilatère EFGH. Justifier la réponse.

Comme (EH) et (FG) sont perpendiculaires à (AC), donc :

$$(EH) \mathbin{/\!/} (FG)$$

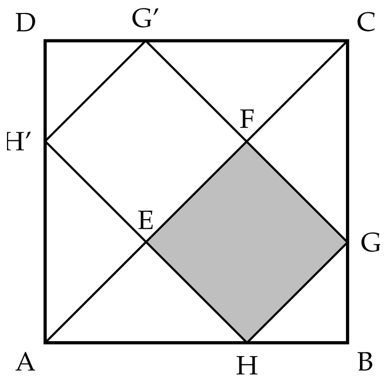
Comme $EH = FG$, le quadrilatère EFGH est un parallélogramme.

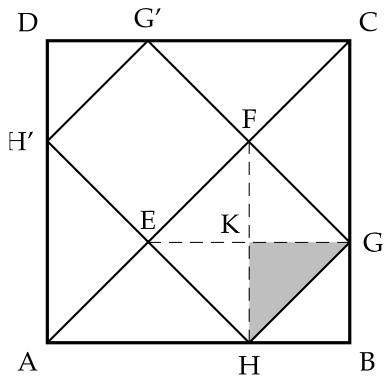
De plus (EH) $\perp$ (EF) et $EH = EF$, ce parallélogramme possède donc un angle droit et deux côtés consécutifs de même longueur, EFGH est un carré.

3) Recherche d'un pavage commun aux carrés ABCD et EFGH

On rappelle que le pavage d'une surface est l'action de couverture totale et sans superposition de cette surface par un nombre entier de « pièces » isométriques.

Les figures ci-dessous correspondent aux carrés ABCD et EFGH construits dans la question 1)





a) Peut-on paver le carré ABCD à l'aide de carrés isométriques au carré EFGH ? Justifier la réponse.

On ne peut paver ABCD avec des pavé EFGH, car pour paver entièrement ABCD, il est nécessaire de mettre un pavé EFGH à un coin et le côté de EFGH mesure $3\sqrt{2}$ qui ne divise pas 9.

b) Peut-on paver les carrés EFGH et ABCD à l'aide de triangles isométriques au triangle GHK où K désigne le centre du carré EFGH ? Justifier la réponse.

Des questions 2) d) et 2) e), on sait que AE $=$ EF $=$ FC $=$ EH $=$ FG et EFGH carré, donc : les triangles AEH et CFG sont isométriques et isocèles rectangles. Comme ABCD est un carré, on en déduit alors que HB $=$ BG et $(HB) \perp (BG)$. Le triangle HGB est isocèle rectangle.

Comme HGK et HGB sont tous deux isocèle rectangle et ont leur hypoténuse en commun, ils sont isométriques. L'image de HGK par une symétrie d'axe (HG) donne HGB.

Par des quarts de tours successifs de centre K du triangle HGK, on peut paver le carré EFGH.

Les triangles AEH, EFH sont isométriques, par un quart de tour de centre E de EFC, on peut paver le triangle AEH.

De même les triangles FHG et FGC sont isométriques, par un quart de tour de centre F de FHG, on peut paver FGC.

On a ainsi paver le triangle ABC. Par une symétrie d'axe (AC) de ABC, on pave le carré ABCD.