Angles. Aires et périmètres

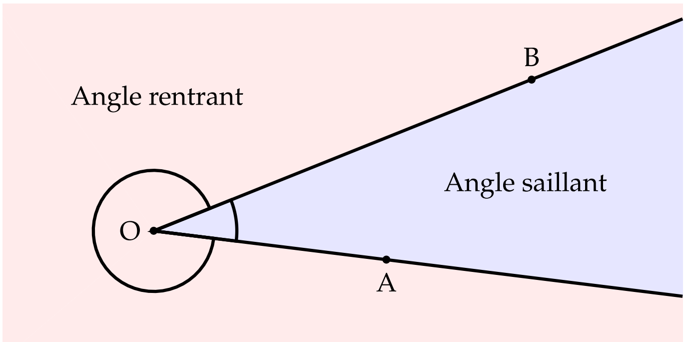
Table des matières

1 Les angles

1.1 Définition

Définition 1 : Un angle est un secteur du plan délimité par deux demi-droites.
On distingue alors deux types d'angles :

- Les angles saillants (ou géométriques) notés : $\widehat{AOB}$ compris entre 0 et 180°.
- Les angles rentrants compris entre 180°et 360°



1.2 Angles saillants

Dans toutes la suite nous considérerons un angle comme un angle saillant.

On distingue parmi les angles saillants, les types suivants :

- Les angles **aigus** : compris entre 0°et 90°
- Les angles **droits** : 90°
- Les angles **obtus** : compris entre 90°et 180°
- Les angles **plats** : 180°

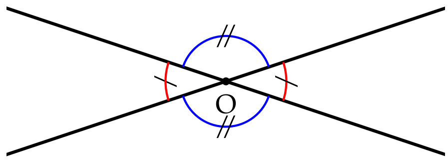
Définition 2 : On dit que deux angles sont complémentaires, supplémentaires si leur somme vaut respectivement 90°et 180°.

$$\alpha + \beta = 90^\circ \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont complémentaires}$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ \qquad \alpha \text{ et } \beta \text{ sont supplémentaires}$$

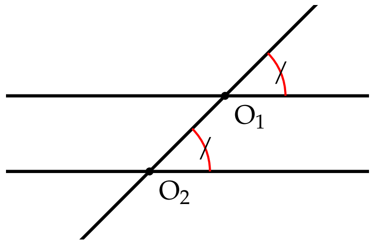
1.3 Égalité entre deux angles

On distingue 4 configurations où deux angles sont égaux

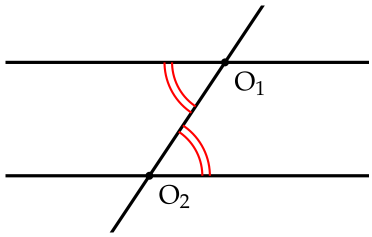
Opposés par le sommet



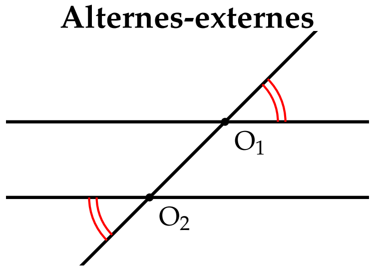
Correspondants



Alternes-internes



Alternes-externes

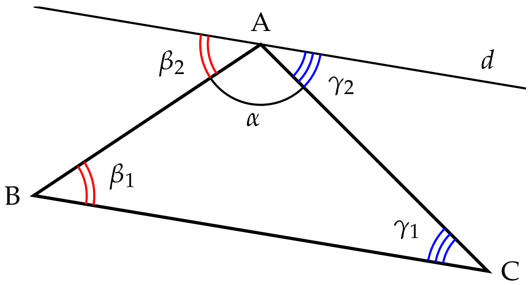


Application

Démontrer que la somme des angles d'un triangle est égal à 180°.

Faisons une figure, sur laquelle on trace la droite d parallèle à (BC).

On a alors les égalités suivantes :



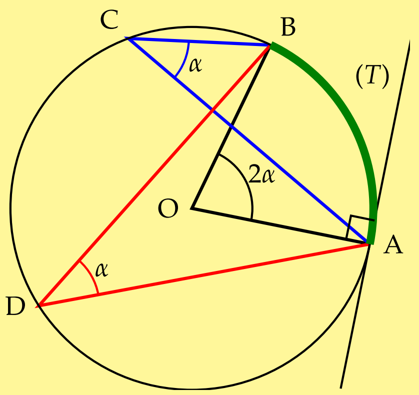
$$\begin{aligned} \beta_1 &= \beta_2 && \text{alternes-internes} \\ \gamma_1 &= \gamma_2 && \text{alternes-internes} \\ \beta_2 + \alpha + \gamma_2 &= 180^\circ \end{aligned}$$

La somme des angles dans un triangle vaut donc 180°

1.4 Angles dans un cercle

Théorème 1 : Angles inscrits, angle au centre, tangente

- Dans un cercle, l'angle au centre vaut deux fois l'angle inscrit.
  $$\widehat{AOB} = 2\widehat{ADB}$$
- Dans un cercle, deux angles qui interceptent le même arc sont égaux.
  $$\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$$
- Dans un cercle, la tangente en un point est perpendiculaire au rayon.
  $$(OA) \perp (T)$$



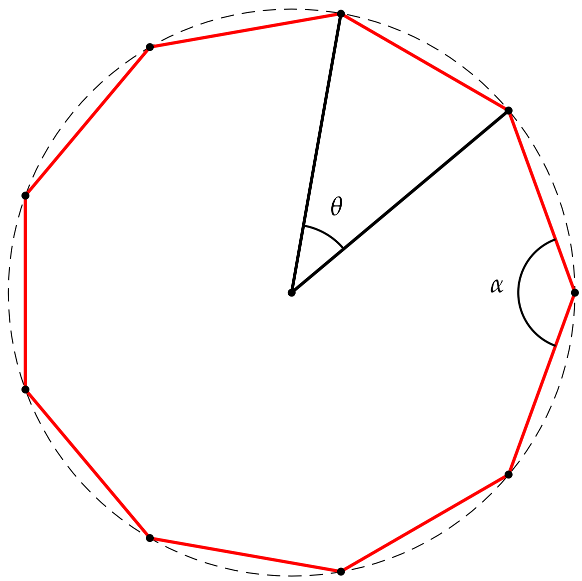
1.5 Angles dans un polygone régulier

Théorème 2 : Un polygone de n côté peut être décomposé en $n-2$ triangles. L'angle α que forme deux côtés adjacents d'un polygone régulier vérifie donc :

$$\alpha = \frac{(n-2)180}{n}$$

L'angle θ au centre s'obtient en divisant 360°par le nombre de côtés. On a alors :

$$\theta = \frac{360}{n}$$

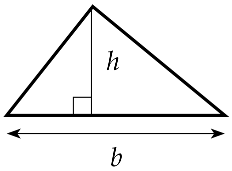
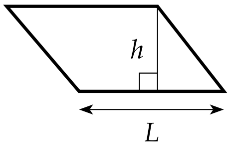
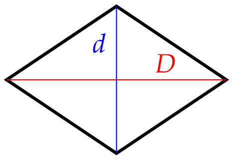
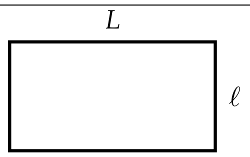
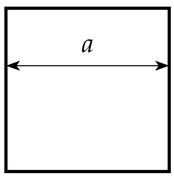
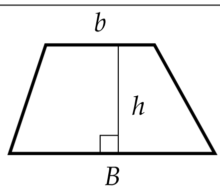
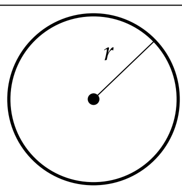
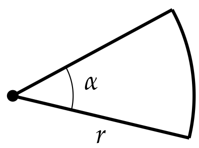


On obtient le tableau suivant pour les polygones réguliers usuels.

Polygone régulier	Angle entre deux côtés adjacents α	Angle au centre θ
Triangle	60	120
Carré	90	90
Pentagone	108	72
Hexagone	120	60
Octogone	135	45
Décagone	144	36
Dodécagone	150	30

2 Aires des surfaces planes

2.1 Tableau récapitulatif

Nom	Surface	Périmètre	Aire
Triangle		somme des côtés	$\dfrac{b \times h}{2}$
Parallélogramme		somme des côtés	$L \times h$
Losange		somme des côtés	$\dfrac{D \times d}{2}$
Rectangle		$2(L + \ell)$	$L \times \ell$
Carré		$4a$	a^2
Trapèze		somme des côtés	$\dfrac{(B+b) \times h}{2}$
Cercle		$2\pi \times r$	$\pi \times r^2$
Secteur angulaire		$\dfrac{\pi \times r}{180}\alpha$	$\dfrac{\pi \times r^2}{360}\alpha$

2.2 Relation entre périmètre et aire

⚠ L'aire et le périmètre ne varient pas nécessairement dans le même sens. On peut par exemple augmenter le périmètre et diminuer l'aire ou inversement.

Exemples :

1) Soit les deux figures suivantes constituées de rectangle de longueur 3 et de largeur 2.

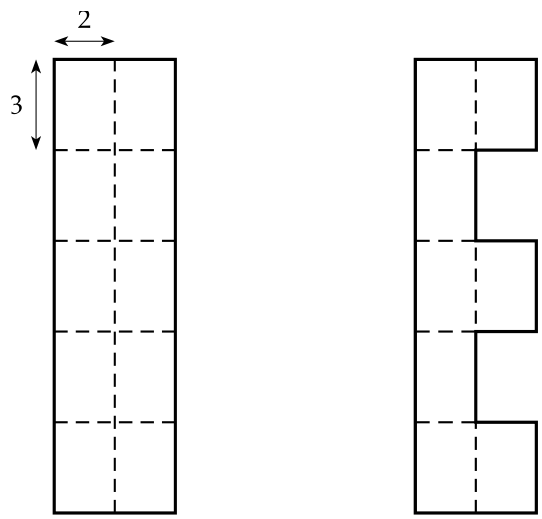


Figure 1 Figure 2

Le périmètre P_1 et l'aire $\mathscr{A}_1$ de la 1re figure sont :

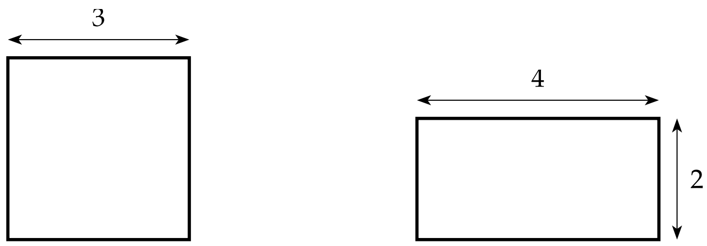
$$P_1 = 10 \times 3 + 4 \times 2 = 38 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_1 = 10 \times 3 \times 2 = 60$$

Le périmètre P_2 et l'aire $\mathscr{A}_2$ de la 2e figure sont :

$$P_2 = 10 \times 3 + 8 \times 2 = 46 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2 = 8 \times 3 \times 2 = 48$$

On a donc $\quad P_1 < P_2 \quad$ mais $\quad \mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$.

2) Soit un carré de côté 3 et un rectangle de longueur 4 et de largeur 2. Calculons l'aire et le périmètre du carré et de rectangle.



Le périmètre P_1 et l'aire $\mathscr{A}_1$ du carré sont :

$$P_1 = 4 \times 3 = 12 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_1 = 3^2 = 9$$

Le périmètre P_2 et l'aire $\mathscr{A}_2$ du rectangle sont :

$$P_2 = 2(4+2) = 12 \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_2 = 4 \times 2 = 8$$

On a donc $\quad P_1 = P_2 \quad$ mais $\quad \mathscr{A}_1 > \mathscr{A}_2$.