Solides et patrons

Table des matières

1 Les polyèdres

1.1 Définition

Définition 1 : Un solide est un corps indéformable.

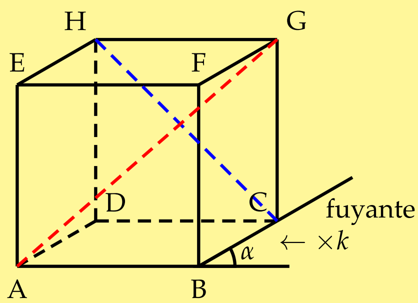
Un polyèdre est un solides qui possède plusieurs faces.
Le nombre de faces minimum est de 4 : le tétraèdre.

1.2 Représentation d'un polyèdre

On représente un polyèdre grâce à la perspective cavalière.

Définition 2 : La **perspective cavalière** est une manière de représenter en deux dimensions des objets en volume. Cette représentation ne présente pas de point de fuite : la taille des objets **ne diminue pas lorsqu'ils s'éloignent**.

Dans cette perspective, deux des axes sont orthogonaux (vue de face en vraie grandeur) et le troisième axe est incliné d'un angle α compris en général entre 30 et 60°par rapport à l'horizontale, appelé "angle de fuite". Les mesures sur cet axe sont multipliées par un facteur de réduction k compris en général entre 0,5 à 0,7.



représentation du cube ABCDEFGH

Cette perspective ne donne qu'une indication sur la profondeur de l'objet. Les traits en pointillés sont les arêtes que l'on ne "voit pas"

⚠ La perspective cavalière **ne conserve pas** :

- la mesure : deux segments de même longueur peuvent être représentés par deux segments de longueurs différentes (AB $\neq$ BC) ;
- les angles en particulier deux droites perpendiculaires peuvent être représentées par deux droites non perpendiculaires ((AB)$\not\perp$(AD))

Un carré peut être représenté par un parallélogramme (AEHD) !
Deux droites peuvent se couper sur la perspective sans être sécantes en réalité ! (les droites (HC) et (AG) par exemple)

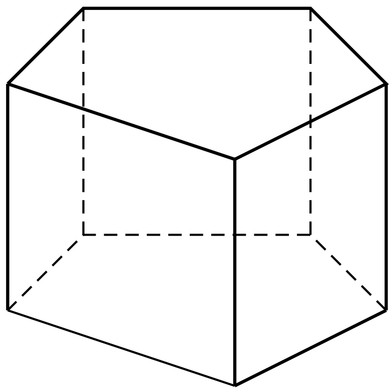
Par contre, cette perspective **conserve** :
- le parallélisme : deux droites parallèles sont représentées par des droites parallèles ;
- le milieu ou tout autre division d'un segment.

1.3 Le prisme droit

1.3.1 Définition

Définition 3 : Un prisme droit est un polyèdre ayant pour bases 2 polygones isométriques parallèles dont les faces latérales sont des rectangles

1.3.2 Exemples



Si les bases ont n côtés alors le prisme droit a :

- $n+2$ faces
- $2n$ sommets
- $3n$ arêtes

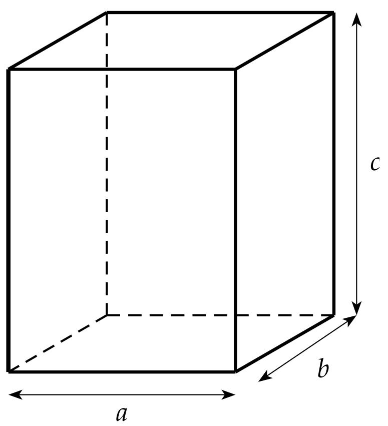
Volume = Aire de la base × hauteur

$$\text{Surface} = \underbrace{2 \times \text{Aire de la base}}_{\text{Fond et couvercle}} + \underbrace{\Sigma \text{ Aires des rectangles}}_{\text{Aire latérale}}$$

Prisme célèbre : Boîte de Toblorone

1.3.3 Cas particulier : Parallélépipède rectangle ou pavé droit.

Lorsque le prisme a pour base un rectangle, le prisme est un parallélépipède rectangle ou pavé droit.



Toutes les arêtes sont en angle droit.

Parallélépipède
Volume $= abc$
Surface $= 2(ab + ac + bc)$

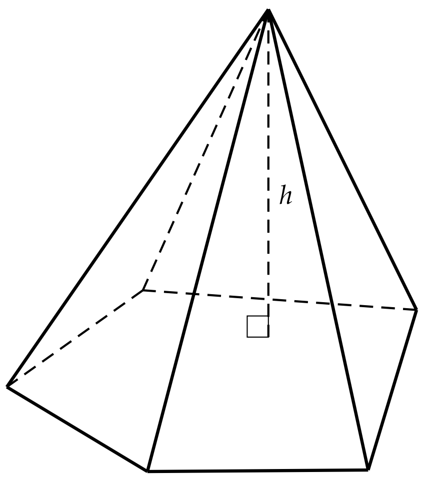
Cube : si $a = b = c$
Volume $= a^3$
Surface $= 6a^2$

1.4 Pyramide

1.4.1 Définition

Définition 4 : Une pyramide est un polyèdre dont les arêtes sont obtenues en joignant les sommets d'un polygone (base) à un point non situé dans le plan de ce polygone.

1.4.2 Exemple



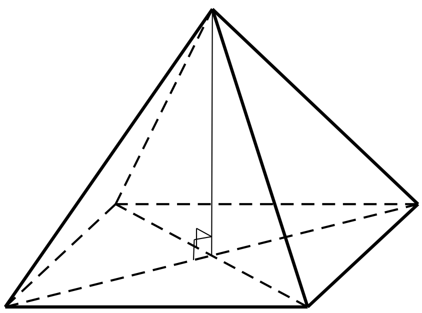
Si la base a n côtés alors la pyramide a :
- $n+1$ faces
- $n+1$ sommets
- $2n$ arêtes

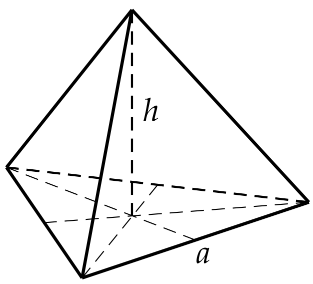
$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

$$\text{Surface} = \underbrace{2 \times \text{ Aire de la base}}_{\text{Fond}} + \underbrace{\Sigma \text{ Aires des triangles}}_{\text{Aire latérale}}$$

1.4.3 cas particulier

La pyramide à base carré et le tétraèdre sont des cas particulier de pyramide.





Un tétraèdre régulier a 4 triangles équilatéraux comme faces.

$$\text{Hauteur} = \sqrt{\frac{2}{3}}\, a$$

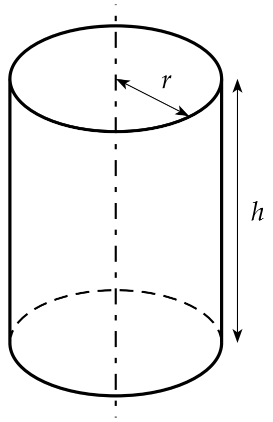
$$\text{Volume} = \frac{\sqrt{2}\, a^3}{12}$$

$$\text{Surface} = 4 \times \mathscr{A}_{ABC} = \sqrt{3}\, a^2$$

2 Solides de révolution

2.1 Le cylindre

Définition 5 : Un cylindre est obtenu par rotation d'une droite parallèle à l'axe de rotation

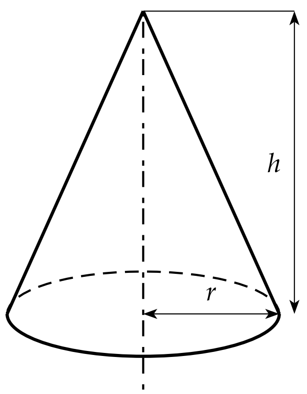


La droite qui engendre par rotation le cylindre s'appelle une **génératrice**

$$\text{Volume} = \pi\, r^2\, h$$
$$\text{Surface} = \underbrace{2\,\pi\, r\, h}_{\text{latérale}} + \underbrace{2\,\pi\, r^2}_{\text{fond et couvercle}}$$

2.2 Le cône

Définition 6 : Un cône est obtenu par rotation d'une droite sécante à l'axe de rotation

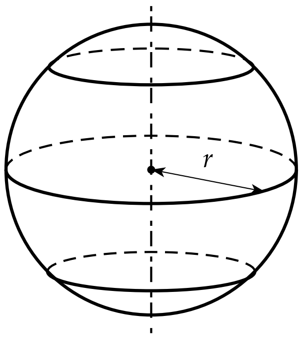


La droite qui engendre par rotation le cône s'appelle une **génératrice**

$$\text{Volume} = \frac{\pi\, r^2\, h}{3}$$
$$\text{Surface} = \underbrace{\pi\, r\, a}_{\text{latérale}} + \underbrace{\pi\, r^2}_{\text{fond}}$$
$$\text{avec} \quad a = \sqrt{r^2 + h^2}$$

2.3 La sphère

Définition 7 : Une sphère est un ensemble de points de l'espace qui sont équidistants d'un centre.



$$\text{Volume} = \frac{4}{3}\pi\, r^3$$
$$\text{Surface} = 4\pi\, r^2$$

3 Patron d'un solide

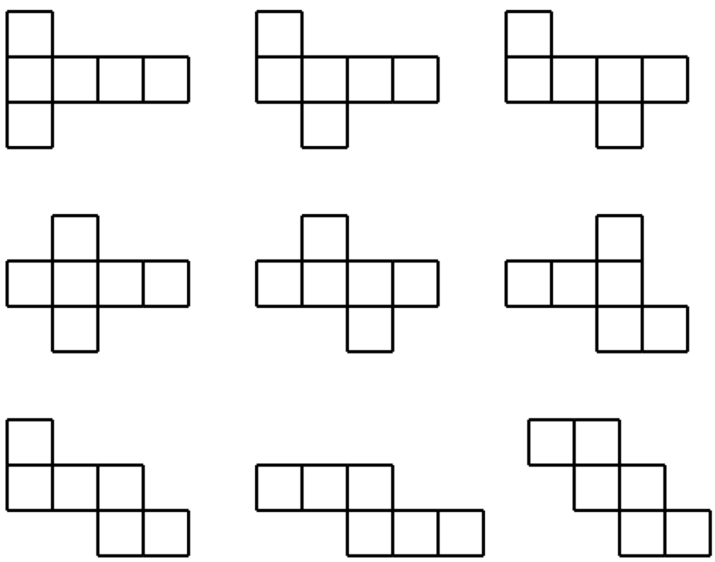
3.1 Définition

Définition 8 : On appelle patron ou développement d'un solide un figure plane obtenue en « dépliant » ce solide

Remarque : Le patron d'un solide n'est pas toujours possible. Par exemple, il n'existe pas de patron de la sphère.
Le patron d'un solide n'est pas unique. Par exemple, il existe 11 patrons possibles d'un cube ou 8 patrons pour une pyramide régulière à base carrée.

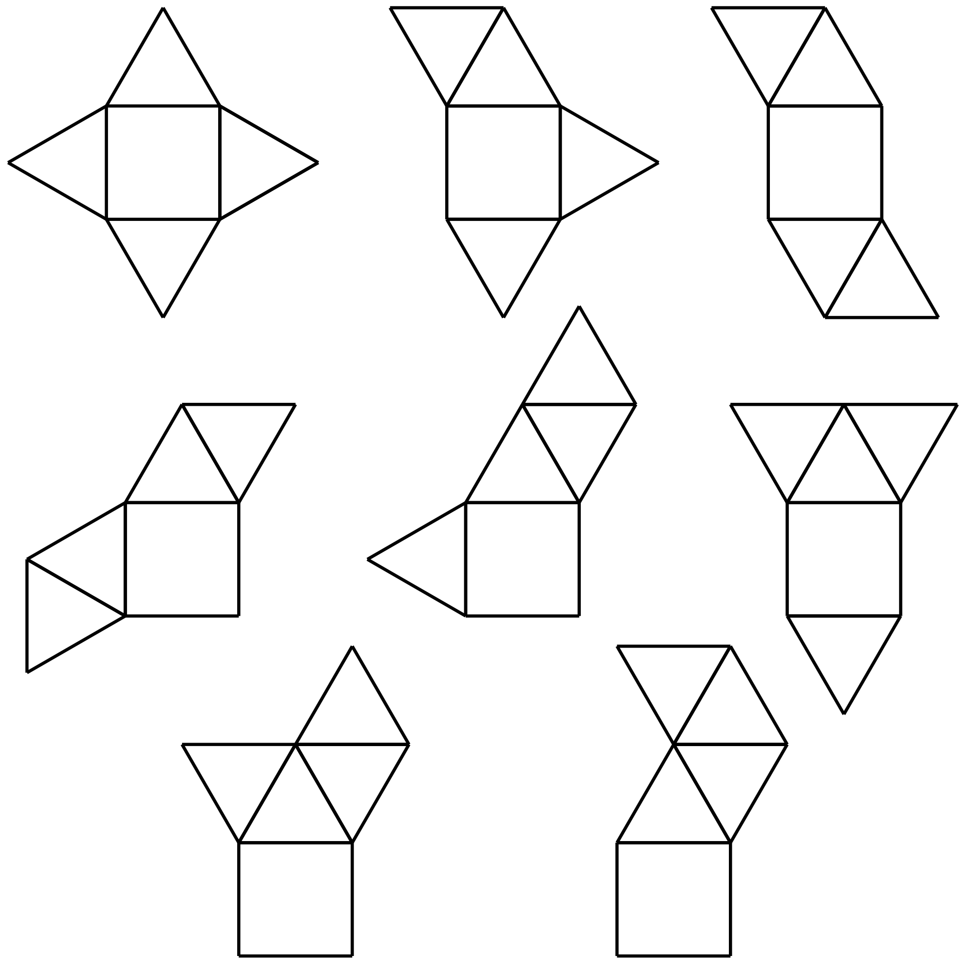
3.2 Les 11 patrons du cube

Un patron est considéré différent d'un autre si l'on ne peut les superposer à l'aide d'une transformation.



3.3 Les 8 patrons d'une pyramide régulière

Le patron d'une pyramide à base carrée régulière est composé d'un carré et de 4 triangles équilatéraux. On obtient 8 patrons différents.



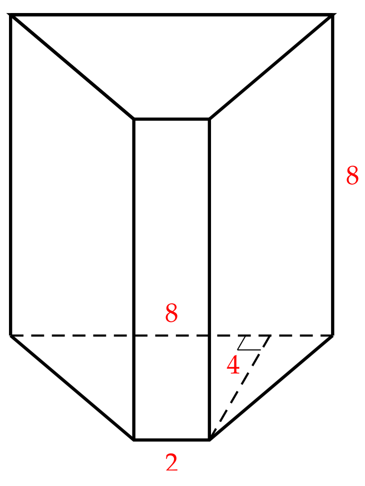
3.4 Patron d'un prisme droit ou d'une pyramide

Les exercices, qui demandent de tracer un patron d'un solide, sont l'occasion de construire à la règle et au compas une figure. Il existe de nombreux cas qu'il est impossible ici de répertorier. Cependant voici deux exemples permettant d'illustrer ces cas de figures. Nous donnerons qu'un seul patron bien qu'il en existe beaucoup d'autres possibles.

3.4.1 Patron d'un prisme

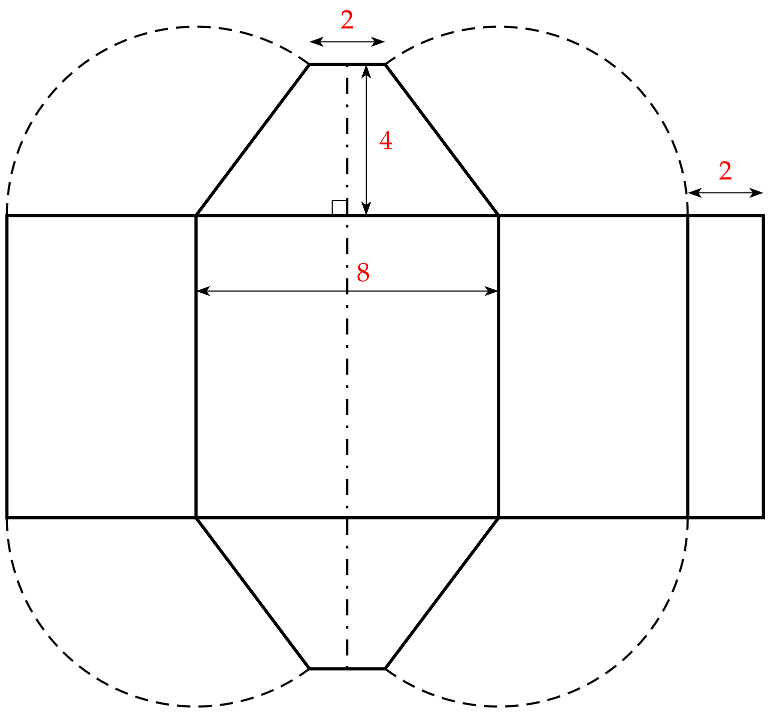
Tracer un patron du prisme suivant à l'aide d'une règle graduée, d'une équerre et un compas :

Prisme droit de 8 cm de hauteur. La base de ce prisme est un trapèze isocèle dont les bases mesurent 2 cm et 8 cm et dont la hauteur est de 4 cm.



- On trace un carré de côté 8 cm.
- On détermine puis l'on trace la médiatrice verticale du carré.
- On poursuit cette médiatrice de 4 cm qui représente la hauteur des deux trapèzes.
- On trace les deux trapèzes de chaque côté de la médiatrice.
- On reporte les côtés des trapèzes sur les côtés horizontaux du carré.
- On trace les deux rectangles latéraux.
- Sur un des côtés latéral, on trace un rectangle dont la largeur correspond à la petite base des trapèzes.

On obtient alors le patron suivant :

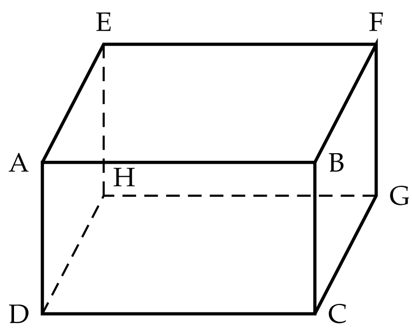


3.4.2 Patron d'une pyramide

Sur la figure les dimensions ne sont pas respectées.

On considère le parallélépipède rectangle ci-contre ABCDEFGH, dont les dimensions sont données par :
$AD = 3,6$ cm ; $AB = 4,8$ cm et $AE = 7,2$ cm.

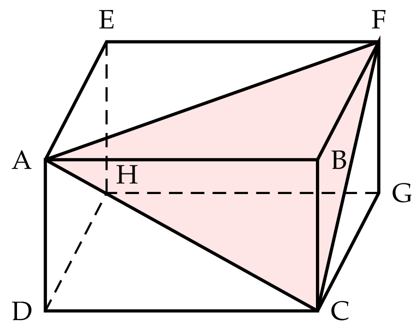
1) Calculer la valeur exacte de la longueur AC (en cm).
2) Construire un patron de la pyramide FABC (laisser apparents les traits de construction).



1) Comme les faces sont des rectangles, le triangle ABC est rectangle en B. En appliquant le théorème de Pythagore, on trouve :

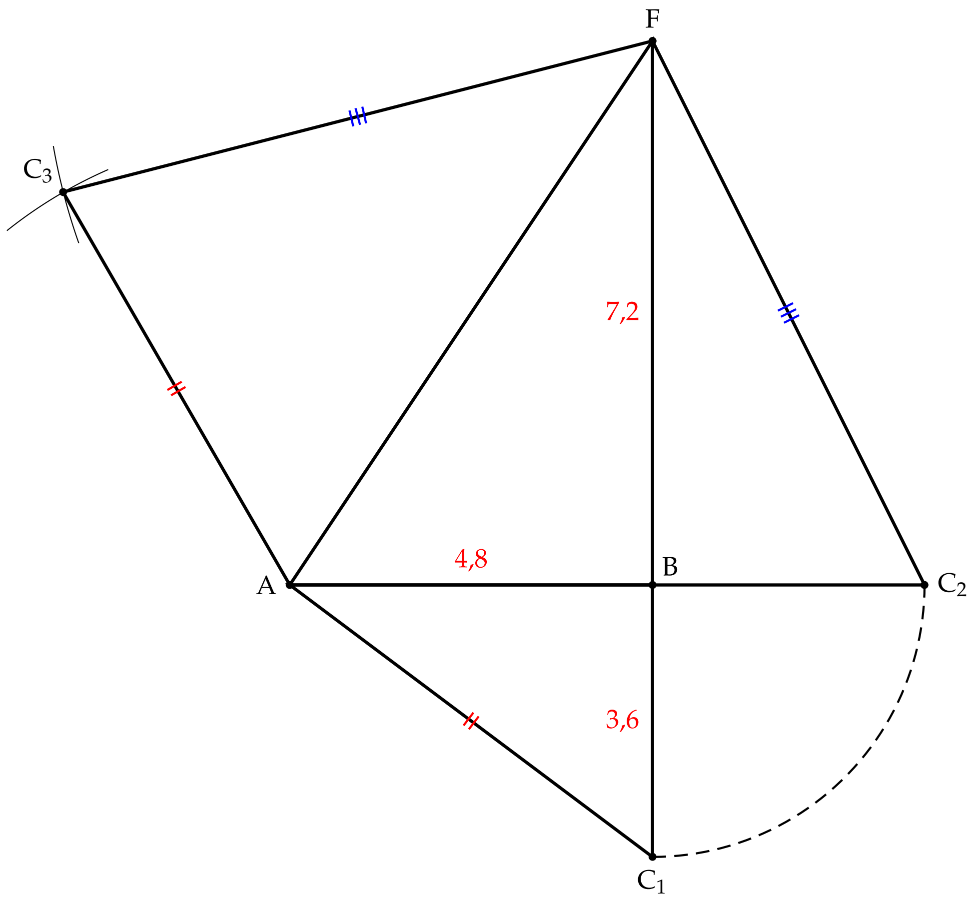
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4,8^2 + 3,6^2 = 36 \quad \text{donc} \quad AC = 6$$

2) On obtient la pyramide suivante :



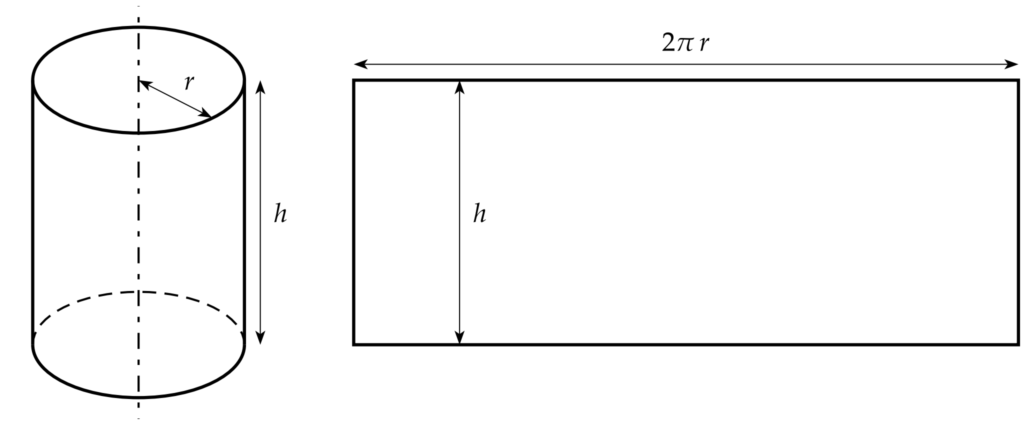
- On trace les triangles ABC_1 et ABF avec les données de l'énoncé.
- On reporte la distance BC_1 à partir de B sur la droite (AB). On trace alors le triangle BFC_2.
- Le point C_3 est l'intersection des cercles de centres A et F de rayon respectifs AC_1 et FC_2. On trace alors le triangle AFC_3.

On a le patron suivant :



3.5 Patron d'un cylindre

Le patron d'un cylindre, si l'on fait abstraction du fond et du couvercle, est un rectangle dont les dimensions correspondent à la hauteur du cylindre (h) et à la circonférence de la base ($2\pi\, r$).



3.6 Patron d'un cône

Le patron d'un cône, si l'on fait abstraction du fond, correspond à un secteur angulaire dont le rayon vaut $a = \sqrt{r^2 + h^2}$ et dont la longueur de l'arc vaut $2\pi\, r$