Relations dans l'espace

Table des matières

1 Le plan

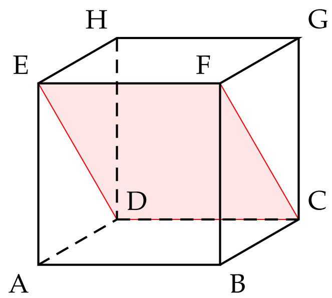
1.1 Définition

Définition 1 : Un plan est défini par :

1) Trois points non alignés A, B, C. Ce plan est alors noté (ABC).
2) Deux droites sécantes d_1 et d_2. Ce plan $\mathscr{P}$ est alors engendré par ces deux droites.

Au lieu de désigner un plan par trois points, on désigne parfois ce plan par une face d'un polyèdre.

Exemple : Dans le cube ABCDEFGH.
On définit alors le plan (EFC)



2 Positions relatives éléments de l'espace

2.1 Relation entre deux droites

Définition 2 : Deux droites contenues dans un même plan sont dites coplanaires.

Exemple : Dans le cube ci-dessus les droites (AB) et (HG) sont coplanaires. Par contre (AB) et (FG) ne sont pas coplanaires.

Propriété 1 : Dans l'espace, deux droites peuvent être :

- **Parallèles** : si d_1 et d_2 sont coplanaires et non sécantes. Les droites peuvent être éventuellement **confondues**.
- **Sécantes** : si d_1 et d_2 ont un point commun.
- **Non coplanaires** : si d_1 et d_2 ne sont ni parallèles, ni sécantes.

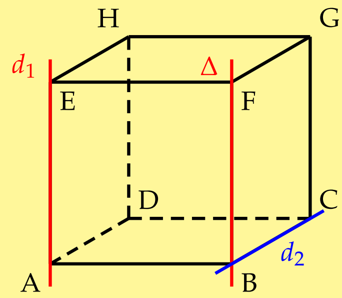
Remarque : Principe de transitivité : si $d_1 \mathbin{/\!/} d_2$ et si $d_2 \mathbin{/\!/} d_3$ alors $d_1 \mathbin{/\!/} d_3$.

Sur notre cube : $(AD) \mathbin{/\!/} (BC)$ et $(BC) \mathbin{/\!/} (FG)$ car les faces ABCD et BCGF sont des carrés, donc $(AD) \mathbin{/\!/} (FG)$

2.2 Perpendicularité ou orthogonalité

Définition 3 : Deux droites d_1 et d_2 sont :

- **perpendiculaires** si, et seulement si, d_1 et d_2 se **coupent** perpendiculairement.
- **orthogonales** si, et seulement si, il existe une droite Δ **parallèle** d_1 qui est perpendiculaire à d_2.



Note : On écrira indistinctement pour deux droites perpendiculaires ou orthogonales : $d_1 \perp d_2$

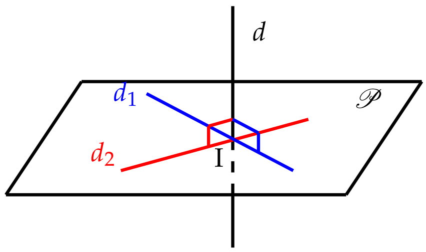
Remarque : On remarquera que dans l'espace, on fait une différence pour des droites entre "orthogonales" et "perpendiculaires".

2.3 Relation entre une droite et un plan

Un droite peut être :

- **Contenue dans un plan** : (BC) est contenue dans le plan (BFG).
- **Sécante à un plan** : si la droite d coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point.
- **Orthogonale à un plan** : si la droite d, sécante en I au plan $\mathscr{P}$, est perpendiculaires à toutes droites de $\mathscr{P}$ passant par I. (AD) est orthogonale à (DCG).
- **Parallèle à un plan** : si la droite d et le plan $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun. Dans notre cube : (AB) est parallèle à (EFG).

Théorème 1 : Une droite d est orthogonale à $\mathscr{P}$ en I si et seulement si deux droites de $\mathscr{P}$ passant par I sont perpendiculaires à d.



2.4 Relations entre deux plans

Deux plans peuvent être :

- Sécants : si les deux plans se coupent en une droite.

- Perpendiculaires : Un plan est perpendiculaire à un autre, s'il contient une droite perpendiculaire au second plan.
- Parallèles : si les deux plans n'ont aucun points commun.

⚠ Il faut se méfier de la notion de plans perpendiculaires.

- Deux plans perpendiculaires peuvent contenir des droites parallèles.
- Deux plans perpendiculaires à un troisième ne sont pas nécessairement parallèles (voir les faces du cube ABCD, ABFE et BCGF).
- Deux plan orthogonaux à une même droite sont parallèles entre eux

Par contre :

- Si deux plans sont perpendiculaires, un plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
- Si deux plans sont parallèles, un plan perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.