Les ensembles de nombres

Différents nombres

EXERCICE 1

Définissez les nombres suivants : un entier naturel, un entier relatif, un nombre rationnel, un nombre décimal, un nombre irrationnel.

Application : Indiquer par oui ou par non si le nombre considéré appartient ou non à l'ensemble correspondant

	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\sqrt{2}$	$0,272$	$\frac{22}{7}$	$\frac{14}{2}$	$-6,5$	π
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								
$\mathbb{D}$								
$\mathbb{Q}$								
$\mathbb{R}$								

EXERCICE 2

Ranger du plus petit au plus grand : 1,109 - 1,7 - 1,07 - 1,81 - 1,811 - 1,100 9

Trouver deux décimaux pouvant s'intercaler entre 1,12 et 1,102

EXERCICE 3

Simplifier les fractions suivantes de la façon de votre choix :

$$\frac{255}{35} \quad ; \quad \frac{26}{65} \quad ; \quad \frac{450}{756} \quad ; \quad \frac{2415}{966} \quad ; \quad \frac{5863}{1144}$$

EXERCICE 4

Qu'est-ce qu'une fraction décimale ?

Pourquoi la fraction $\frac{a}{b}$ est décimale si $\frac{a}{b} = \frac{a+21}{b+30}$?

EXERCICE 5

Comment reconnaître qu'un nombre rationnel n'est pas un nombre décimal ?

Pour chacun des nombres suivants, préciser s'il est décimal ou non et justifier votre réponse.

$$\frac{17}{8} \quad ; \quad \frac{8}{17} \quad ; \quad \frac{2794}{55} \quad ; \quad \frac{1096}{152}$$

EXERCICE 6

Soit le principe des tiroirs :

Si on répartit $(n+1)$ chaussettes dans n tiroirs, nécessairement il y a un tiroir qui possède au moins 2 chaussettes.
A partir de ce principe, montrer que l'écriture décimale de $\dfrac{22}{7}$ possède une série de chiffres qui se répète indéfiniment.
Peut-on généraliser ce principe à tout rationnel qui n'est pas nombre décimal ?

Exercice 7

Sans calculatrice, montrer que les fractions suivantes ne sont pas égales.

$$\frac{208\,341}{66\,317} \quad ; \quad \frac{312\,689}{99\,532}$$

Ces deux fractions représente l'encadrement à 10^{-10} d'un nombre connu. Lequel ?

Exercice 8

Donner la notation scientifique des nombres suivants :

- 0,005 94 ;   124 000 000 ;   1 450 ;   3 140 000 000 000
- 0,000 001 5 ; 362×10^5

Exercice 9

Traduire en notation décimale les nombres suivants :

$1,457 \times 10^6$; $2,395 \times 10^{-1}$; $5,3 \times 10^{11}$; $0{,}068\,35 \times 10^4$; $35,8 \times 10-3$

Exercice 10

Compléter le tableau suivant :

$\dfrac{121}{17}$	Approx. : 2 chiffres après la virgule	Approx. : 4 chiffres après la virgule
Par excès		
Par défaut		
Au plus près		

Donner une approximation à 10^{-4} de $\sqrt{5}$

Exercice 11

Diviseurs

Trouver tous les diviseurs de 120.

Exercice 12

Problème

1) On ajoute le même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\dfrac{19}{39}$. On obtient alors le double de cette fraction. Quel est ce nombre ?

2) La lettre x désigne un nombre. Dire, en justifiant, si les énoncés suivants sont vrais ou faux :

- **Proposition 1** :
"Si $2x$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel."
- **Proposition 2** :
"Si $\dfrac{x}{2}$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel."
- **Proposition 3** :
"Si $x+1$ est un nombre entier naturel, alors x est un nombre entier naturel."

Exercice 13

Multiplication

On se propose de calculer $A = 50\,000\,006 \times 70\,000\,008$

1) En tapant ce produit sur une calculatrice scientifique, on peut voir apparaître sur l'écran :
$$3{,}500\,000\,82 \times 10^{15}$$
Justifier, sans calculer A, que cette valeur affichée n'est pas la valeur exacte de A.
2) Toujours sans calculer A, démontrer que : $35 \times 10^{14} < A < 48 \times 10^{14}$.
En déduire le nombre de chiffres de A.
3) Le nombre A peut aussi s'écrire : $(5 \times 10^7 + 6) \times (7 \times 10^7 + 8)$.
En utilisant les produits : 5×7 , 5×8 , 6×7 et 6×8.
Déterminer la valeur exacte de A.
4) Soit $B = 48\,506\,557 \times 505\,149$
Calculer en utilisant une calculatrice :
$$48\,506 \times 505 \quad ; \quad 557 \times 505 \quad ; \quad 48\,506 \times 149 \quad ; \quad 557 \times 149$$
En déduire, sans nouvelle utilisation de la calculatrice, en écrivant les calculs, la valeur exacte de B.

Exercice 14

Rationnels non décimaux

1) Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont décimaux ?
Justifier la réponse.
$$\frac{1}{7} \quad ; \quad \frac{27}{8} \quad ; \quad \frac{91}{7} \quad ; \quad \frac{42}{17}$$
2) Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale périodique de $\dfrac{1}{7}$.
   a) Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\dfrac{1}{7}$.
   b) Donner, en justifiant succinctement, la 32^{e} décimale du développement périodique de $\dfrac{1}{7}$.

3) Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\dfrac{42}{17}$

En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17 on obtient le tableau suivant. A partir de la cellule A2, la colonne A donne les restes successifs de la division de 42 par 17. A partir de la cellule B2, la colonne B donne les quotients successifs.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8

a) Donner sans justification la 20e décimale de l'écriture décimale de $\dfrac{42}{17}$?

b) À partir du tableau ci-contre, donner l'écriture décimale périodique de $\dfrac{42}{17}$.

c) Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule A18 un reste déjà obtenu.

4. On se propose maintenant de retrouver l'écriture fractionnaire du rationnel

$$a = 1,\overline{23}$$

(c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est $1,2323\ldots$).

a) Calculer : $100\,a - a$

b) En déduire l'écriture de a sous forme fractionnaire.