Nombres premiers. Pgcd, ppcm

EXERCICE 1

Connaissances

1) Définir un diviseur et un multiple.

2) Qu'est-ce qu'un nombres premier. Donner les nombres premiers jusqu'à 100.
Comment peut-on savoir qu'un nombre est premier ? Parmi les nombres suivants quels sont ceux qui sont premier : 109, 117, 271 et 323.

3) Décomposition d'un nombre en facteurs premiers. Nombre de diviseurs. Décomposer 120 en facteurs premiers puis déterminer tous les diviseurs de 120.

4) Qu'est ce que le pgcd de deux nombres ? le ppcm ? Quelle relation existe t-il entre le pgcd et le ppcm. Calculer $\text{pgcd}(28, 77)$ et $\text{ppcm}(28, 77)$. Les entiers 39 et 52 sont-il premiers entre eux. Calculer $\text{pgcd}(882, 945)$.

5) On veut découper un rectangle de 24 cm sur 40 cm en carrés dont le côté est le plus grand possible, sans perte. Quel doit être le côté du carré ?
On dispose d'un grand nombre de rectangle du type précédent que l'on veut assembler bord à bord pour former un carré le plus petit possible. Quel doit-être le côté du carré ?

EXERCICE 2

Histoire de billes

Des billes doivent être partagées entre deux enfants de telle sorte que le produit du nombre de billes attribuées au premier par le nombre de billes attribuées au second soit égal à 285. Quels sont tous les résultats possibles de partage ?

EXERCICE 3

Sommes d'argent

Trois personnes ont reçu chacune une somme d'argent différente exprimée en euros (nombre entier). Soit S_1 le montant reçu par la première personne, S_2 le montant reçu par la deuxième personne et S_3 le montant reçu par la troisième personne. Sachant que :

$$S_1 \times S_2 \times S_3 = 2\,431$$

déterminer toutes les solutions possibles.

EXERCICE 4

Un entier naturel

Déterminer le nombre entier N satisfaisant simultanément aux trois conditions ci-dessous :

- N est divisible par 6
- N n'est pas divisible par 8.
- N a exactement 15 diviseurs.

EXERCICE 5

Nombres parfaits

Un nombre entier naturel N est dit parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs positifs autres que lui-même. Par exemple, 28 est un nombre parfait car les diviseurs de 28 (autres que 28) sont : 1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 14 ; 28 et

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

1) Montrer que 6 et 496 sont des nombres parfaits.
2) 120 est-il un nombre parfait ? Justifier votre réponse.
3) On admet qu'un nombre entier pair N est parfait si, et seulement si, il est de la forme :

$$N = 2^n(2^{n+1} - 1)$$

n étant un entier supérieur ou égal à 1 tel que $(2^{n+1} - 1)$ soit un nombre premier.

a) Appliquer la formule pour n compris entre 1 et 4. Quels résultats retrouve-t-on ?

b) On donne ci- dessous la liste des nombres premiers compris entre 100 et 150. En utilisant la propriété ci-dessus, déterminer le plus petit nombre parfait pair supérieur au nombre 496.
Nombres premiers compris entre 100 et 150 :
101 ; 103 ; 107 ; 109 ; 113 ; 127 ; 131 ; 137 ; 139 ; 149.

EXERCICE 6

Nombre avec trois diviseurs

Quels sont les nombres inférieurs à 10 qui possèdent exactement trois diviseurs ?
Il n'est pas nécessaire de justifier.
Je suis un nombre à trois chiffres dont la somme vaut 13 et je possède exactement trois diviseurs. Qui suis-je ? Trouver ce nombre (il est unique), en expliquant la démarche.

EXERCICE 7

Histoire de billes

Marc a 108 billes rouges et 135 billes noires. Il veut faire des paquets de sorte que :
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes rouges
- tous les paquets contiennent le même nombre de billes noires
- toutes les billes rouges et toutes les billes noires soient utilisées.

Quel nombre maximal de paquets pourra t-il réaliser ? Combien y aura t-il alors de billes rouges et de billes noires dans chaque paquet ?

EXERCICE 8

Fête d'école

Pour la fête de l'école, des parents d'élèves ont confectionné des flans pâtissiers et des tartes aux pommes. Une part de flan pâtissier est vendue 1,50 € et une part de tarte aux pommes 2,00 €. Dans l'après-midi, 72 parts de gâteaux ont été vendues pour une recette totale de 122,00 €. Déterminer le nombre de parts de chaque sorte qui ont été vendues :

1) par une méthode algébrique ;
2) par un raisonnement de type arithmétique.

EXERCICE 9

Le village de Centville

Le village de Centville compte 100 habitants. Le plus âgé est né en 1900 et le plus jeune en 1999. Tous les habitants sont nés une année différente et tous le premier janvier. Pierre habite Centville. En cette année 2001, la somme des chiffres de son année de naissance est égal à son âge.
On se propose de déterminer l'année de naissance de Pierre de deux manières différentes.

1) Résoudre ce problème en utilisant des outils algébriques.
2) Résolution arithmétique.
   a) Démontrer que l'âge de Pierre est inférieur ou égal à 28 ans.
   b) Sachant que l'âge de Pierre est inférieur ou égal à 28 ans, décrire une procédure qu'un élève de fin de cycle 3 pourrait mettre en œuvre pour résoudre ce problème.

EXERCICE 10

Carrelage d'une pièce

Pour carreler une pièce rectangulaire mesurant 4,18 m sur 5,67 m, un carreleur propose à des propriétaires le choix entre deux modèles de dalles carrées :

1) Le premier modèle a 29 cm de côté et coûte 2,30 € l'unité.
   Avec ce modèle, il n'utilise que des dalles entières et il complète avec du joint autour de chaque dalle.
   a) Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la largeur de la pièce.
   b) Calculer le nombre maximal de dalles que l'on peut poser dans la longueur de la pièce.
   c) Les joints autour des dalles auront-ils tous la même largeur ?
      Si oui, quelle est cette largeur ?
2) Le deuxième modèle a 36 cm de côté et coûte 3,10 € l'unité.
   Avec ce modèle-là, il est préconisé des joints de 0,6 cm et le carreleur est alors dans l'obligation de couper des dalles et les découpes ne sont pas réutilisées. Calculer le nombre de dalles nécessaires.
3) Quel sera le choix le moins coûteux pour l'achat des dalles ?