Solides et patrons

EXERCICE 1

Cours

1) Représenter un cube en perspective cavalière.
2) Qu'est-ce qu'un polyèdre ?
3) Qu'est-ce qu'un prisme droit ? Si les bases du prisme ont n côtés combien le prisme droit a t-il de faces, de sommets et d'arêtes ? Quel est le volume d'un prisme droit ? Donner des hexaèdres qui sont des prismes particuliers ?
4) Qu'est-ce qu'une pyramide ? Si la base de la pyramide a n côtés, combien celle-ci a t-elle de faces, de sommets et d'arêtes ? Quel est le volume d'une pyramide ? Donner des pyramides particulières ?
5) Quel est le volume et l'aire des surfaces d'un cylindre, d'un cône et d'une sphère ?
6) Qu'est-ce qu'un patron d'un solide ?

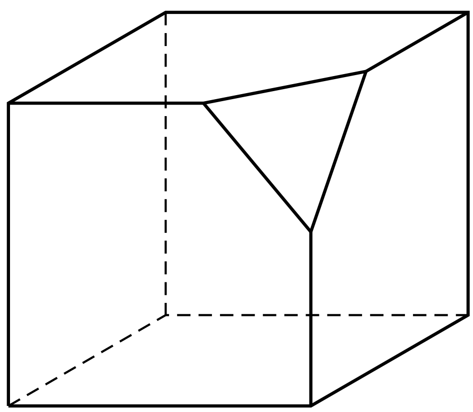
   Représenter les 11 patrons possibles d'un cube.

   Représenter les 8 patrons possibles d'une pyramide à base carrée régulière (les faces latérales sont des triangles équilatéraux).

EXERCICE 2

Nombre de sommets, faces et arêtes.

Si on sectionne un coin d'un cube par un plan alors on obtient le solide ci-contre.



1) On découpe de la même façon les huit coins du cube, les faces triangulaires ne se touchent pas et ne se recoupent pas. On obtient alors un solide qui a 14 faces ($F = 14$).

   Préciser le nombre S de sommets et le nombre C d'arêtes de ce solide.

   Vérifier que : $S - C + F = 2$.
2) On coupe de la même façon les huit coins du cube de départ par des plans qui passent par les milieux des arêtes.

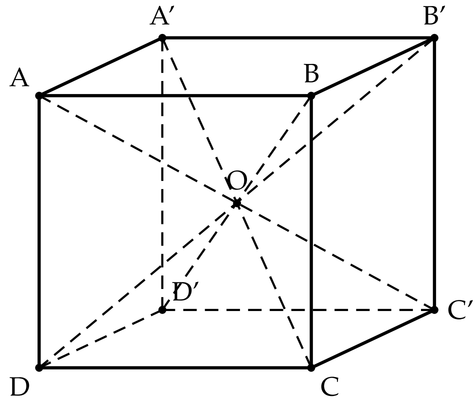
   Le volume total des huit morceaux découpés est-il égal au volume du solide restant ? Justifier la réponse par des calculs, en notant a la longueur de l'arête du cube.

Exercice 3

Patron d'une pyramide.

ABB′A′DCC′D′ est un cube. Chacune des arêtes mesure 4 cm.

1) Dessiner en vraie grandeur un patron de la pyramide OABB′A′ (préciser les longueurs des segments tracés).
2) Sans utiliser de formule de calcul de volume autre que celle qui donne le volume d'un cube, calculer le volume de la pyramide OABB′A′ (en donner une valeur approchée au mm^3 près).



Exercice 4

Faces d'un cube

La figure 1 ci-contre représente un cube en bois ABCDHEFG dont les faces opposées sont décorées avec le même motif : hachures, points ou uni.
Le volume de ce cube est 216 cm^3.

1) Nommer chaque face cachée de ce cube et indiquer son motif.
2) Parmi les patrons suivants quels sont ceux qui correspondent au cube ABCDHEFG ? Justifier la réponse.

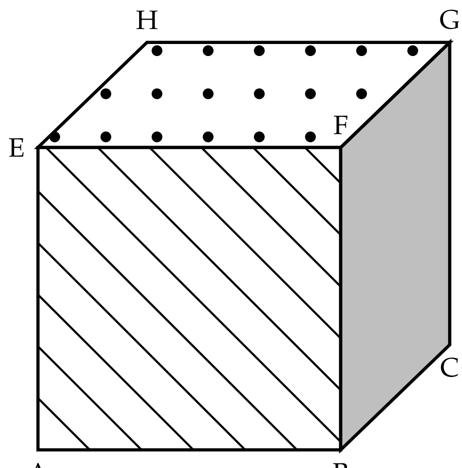
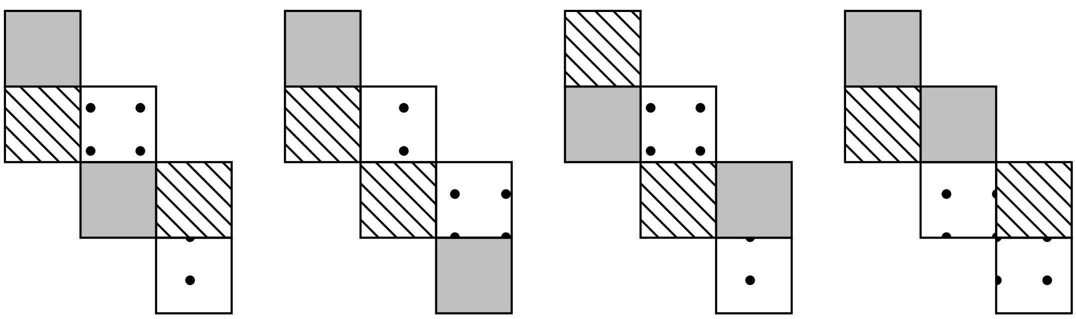


Figure 1



Patron n° 1 Patron n° 2 Patron n° 3 Patron n° 4

3) Le cube ABCDHEFG est scié en petits cubes identiques dont les arêtes sont 3 fois plus petites que celles du cube ABCDHEFG (cf. figure 2).
   a) Combien de petits cubes obtient-on ?
   b) Déterminer le volume d'un petit cube.
   c) En déduire la longueur des arêtes d'un petit cube et du grand cube ABCDHEFG.

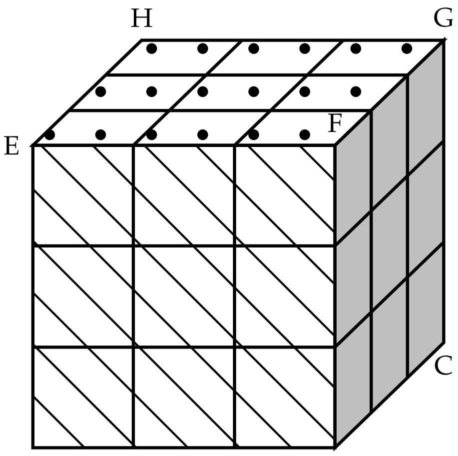


Figure 2

4) a) Ces petits cubes n'ont pas tous le même nombre de faces décorées. Reproduire et compléter le tableau suivant qui compte les cubes ayant le même nombre de faces décorées.

Nombre de faces décorées	0	1	2	3	4	5	6
Nombres de petits cubes							

   b) Quel est le nombre total de petites faces décorées ?
5) Par assemblage et collage, on reconstitue le gros cube initial auquel on retire un petit cube à chacun de ses 8 sommets ; on obtient ainsi un nouveau solide.
   a) Calculer le volume de ce solide
   b) Calculer son aire.

Exercice 5

Pyramides

1) On considère une pyramide SABCD (figure 1) telle que :
   - sa base ABCD est un carré de côté 4 cm et de centre O,
   - son sommet S est sur la perpendiculaire en O au plan (ABC) et la distance SO est égale à 2 cm.

   a) Calculer la valeur exacte de la longueur de l'arête [SA] et préciser la nature du triangle SAB.
   b) En utilisant le quadrillage de la copie (0,5 cm $\times$ 0,5 cm), construire, à la règle et au compas, un segment de longueur SA.

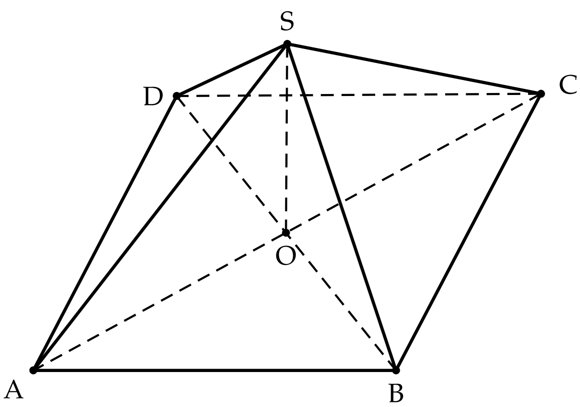


figure 1

2) On considère le solide obtenu en accolant par leur base carrée deux pyramides identiques à la pyramide SABCD (figure 2). Construire sur votre copie un patron de ce solide.

3) Soit un cube ABCDEFGH d'arête 4 cm. Sur chaque face du cube on construit une pyramide identique à la pyramide SABCD de la question 1).
   a) Calculer le volume du solide ainsi obtenu. On rappelle que le volume V d'une pyramide est donné par la formule : $V = \dfrac{1}{3} \times B \times h$ où B désigne l'aire de sa base, et h la hauteur de la pyramide.
   b) Dans cette question, on s'intéresse aux deux pyramides construites sur les faces ABCD et FBCG et de sommets respectifs S et S′ (figure 3). On note I le centre du cube, J le milieu de [BC] et O et O′ les centres des faces ABCD et FBCG respectivement.
      i) On considère le plan (SIS′) auquel appartiennent aussi les points O, J et O′ (on ne demande pas de le démontrer). Montrer que l'angle $\widehat{SJS'}$ est plat.
      ii) Quelle est la nature du quadrilatère SBS′C ? Justifier votre réponse.

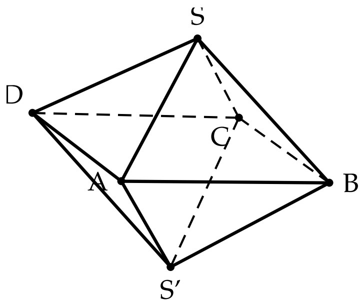


Figure 2

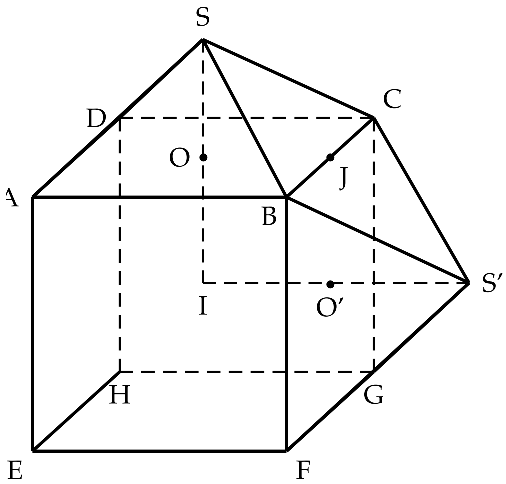


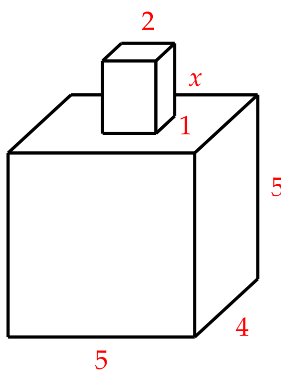
Figure 3

EXERCICE 6

Flacon de parfum

Un fabricant de parfum veut fabriquer deux flacons de même contenance, suivant les schémas ci-dessous. L'unité de longueur est le centimètre.

1) Le flacon 1 est constitué de deux pavés droits. x désigne la mesure de la hauteur du pavé droit supérieur.
   Montrer que la mesure V_1 du volume du flacon 1 s'exprime en fonction de x sous la forme :
   $$V_1(x) = 2x + 100$$



Flacon 1

2) Le flacon 2 est constitué
   - d'une pyramide tronquée à base rectangulaire identique au solide ABCDEFGH de la figure 1. La droite (SO) est la hauteur de la pyramide ; elle perce le rectangle EFGH en O′. On donne :

SO = 11 cm ; SO′ = 5,5 cm ; AB = 6 cm ; BC = 4 cm ; EF = 3 cm ; FG = 2 cm,

- et d'un pavé droit de dimensions 2, 3, et x comme indiqué ci-dessous.

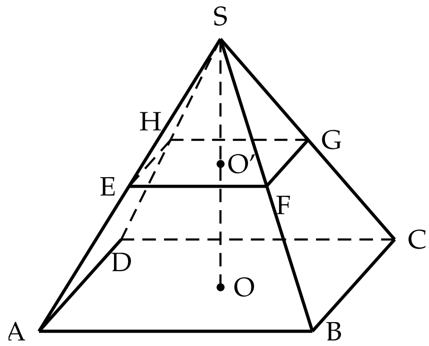


Figure 1

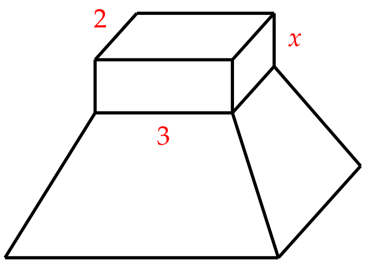


Figure 2

Montrer que la mesure V_2 du volume du flacon 2 s'exprime en fonction de x sous la forme :

$$V_2(x) = 6x + 77$$

On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3}(\text{aire de la base } x \times \text{hauteur de la pyramide})$$

3) Dans un repère orthogonal du plan :
- sur l'axe des abscisses, un centimètre représente une longueur de 1 cm,
- sur l'axe des ordonnées, un millimètre représente un volume de 1 cm^3.

a) Représenter graphiquement, dans ce repère, les fonctions V_1 et V_2 pour des valeurs de x comprises entre 0 et 10.

b) Déterminer graphiquement une valeur approchée de x au dixième près pour laquelle $V_1(x) = V_2(x)$.

c) Résoudre l'équation $V_1(x) = V_2(x)$ par le calcul.

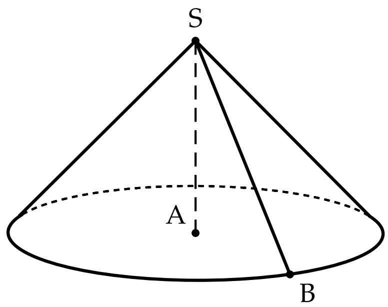
d) Calculer le volume correspondant à la valeur x trouvée précédemment et l'exprimer en centilitre.

Exercice 7

Bougie

Une bougie a la forme d'un cône de révolution de sommet S.
Sa base est un disque de centre A et de rayon 14 cm.
On donne SB = 21 cm.
On rappelle la formule permettant de calculer le volume V d'un cône :

$$V = \frac{B \times h}{3}$$



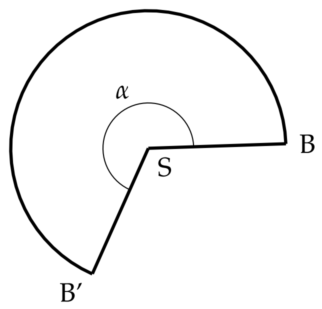
où B désigne l'aire de la base du cône et h la hauteur du cône.

1) a) Calculer la valeur exacte de la hauteur de la bougie. En donner une valeur approchée au mm près.

   b) Calculer en cm^3 le volume exact de la bougie et en donner une valeur approchée au mm^3 près.

   c) Combien de bougies de ce type peut-on fabriquer avec 20 litres de cire ?

2) Pour fabriquer ces bougies, on construit un moule en papier qui est un cône de mêmes dimensions que les bougies. La figure ci-contre représente un patron de ce moule. (La figure n'est pas à l'échelle).



   a) Calculer la longueur exacte de l'arc de cercle BB'.

   b) Calculer l'angle α, en degré.

3) En utilisant le même moule en papier, on décide de fabriquer des bougies bicolores rouges et blanches. On procède de la manière suivante :
   - on remplit le moule (pointe en bas) de cire blanche jusqu'à mi-hauteur,
   - on complète avec de la cire rouge.

   Quelle est la proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie ?